В.Б. Уваров

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1981

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА,
ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ
И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

В.Б.УВАРОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть I

Издательство Московского Университета
1981

Рецензенты :

канд.физ.-мат.наук, доцент, Е.И. Моисеев
докт.физ.-мат.наук, доцент В.Ф. Бутузов

Уваров В.Б. Математический анализ, часть I : Учебное пособие. - М. : Изд-во Моск. ун-та, 1981. - 192 с.

Курс рассчитан на лиц, окончивших вузы, но не имеющих систематического математического образования. Основная цель данного курса - быстрое овладение материалом математического анализа в объеме программы физических факультетов университетов.

Курс "Математический анализ" состоит из двух частей.

В первой части курса изложены следующие вопросы : теория действительного числа, комплексные числа, элементарные сведения о векторном пространстве, ряды, дифференциальные исчисления для функций одной и нескольких переменных, некоторые приложения дифференциального исчисления для приближенных вычислений : интерполирование, методы вычисления корней уравнений. Рассмотрено также теория неявных функций и её приложения.

В части второй будут изложены основы интегрального исчисления ; теория функциональных последовательностей и рядов ; ряды и интегралы Фурье, а также векторный анализ.

© Издательство Московского университета, 1981 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава I. ТЕОРИЯ ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА, КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ВЕКТОРЫ 6–35

Введение 6

§ I. Определение вещественного числа. Соответствие между числами и точками прямой 7

§ 2. Сравнение вещественных чисел 9

§ 3. Точные грани числового множества II

§ 4. Арифметические операции I5

§ 5. Степени вещественных чисел I8

§ 6. Предельные точки числового множества 2I

§ 7. Комплексные числа 24

§ 8. Векторные пространства 27

§ 9. Геометрическая интерпретация векторов 33

Глава 2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ 36–63

§ I. Определение числовых последовательностей и подпоследовательностей. Сходящиеся последовательности 36

§ 2. Свойства сходящихся последовательностей . . . 40

§ 3. Числовые ряды 48

§ 4. Операции над рядами 54

§ 5. Комплексные и векторные последовательности и ряды 59

Глава 3. ПРЕДЕЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ 64–95

§ I. Способы задания функции 64

§ 2. Предел функции 66

§ 3. Основные свойства предела функции 72

§ 4. Непрерывность функции 76

§ 5. Некоторые свойства функций, непрерывных на замкнутом ограниченном множестве 79

§ 6. Монотонные функции 83
§ 7. Элементарные функции 87
Глава 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ 96–I47
§ I. Производная и дифференциал 96
§ 2. Свойства производных и дифференциалов для функции одной переменной I0I
§ 3. Производные элементарных функций I06
§ 4. Возрастание и убывание в точке функции одной переменной. Локальный экстремум I09
§ 5. Условия дифференцируемости функции нескольких переменных I15
§ 6. Производные и дифференциалы высших порядков для функции одной переменной I22
§ 7. Частные производные и дифференциалы высших порядков для функции нескольких переменных. Независимость от порядка дифференцирования . . . I25
§ 8. Формула Тейлора I29
§ 9. Ряды Тейлора I35
§I0. Комплекснозначные и вектор-функции I40
§II. Неопределенный интеграл I43
Глава 5. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ I47–I92
§ I. Раскрытие неопределенности I47
§ 2. Исследование графика функции I53
§ 3. Приближенные методы вычисления корней . . . I58
§ 4. Интерполирование I64
§ 5. Неявные функции I69
§ 6. Зависимые и независимые системы функций . . . I74
§ 7. Локальный экстремум функции нескольких переменных I78
§ 8. Условный экстремум функции нескольких переменных I85

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу настоящего курса положены лекции, читавшиеся студентам специального вечернего отделения факультета вычислительной математики и кибернетики Московского университета в течение ряда лет.

Следует отметить некоторые характерные отличия этого курса от других аналогичных курсов, которые связаны с особым контингентом слушателей. Студенты специального вечернего отделения фак. ВМиК МГУ уже имеют высшее образование и поступают на это отделение с целью повышения математического образования. В связи с этим перед автором стояла сложная задача: изложить университетский курс математического анализа за один учебный год, не предполагая у слушателей достаточной математической подготовки и в то же время не уменьшая строгости рассуждений и широты охвата материала. Для этого пришлось модернизировать доказательства с целью значительного уменьшения их объема, придумывать новые доказательства известных теорем, проводить доказательства в одномерном случае в таком виде, чтобы их можно было без изменений перенести на многомерный случай, пересмотреть порядок изложения материала и широко использовать векторные обозначения. Достаточно большое внимание в курсе уделено применению понятий анализа для проведения приближенных вычислений.

Автор будет благодарен за любые замечания, способствующие улучшению качества предлагаемого курса.

* * *

В качестве дополнительной литературы при изучении предлагаемого курса рекомендуется использовать следующие учебники:

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, часть I, часть II. - М.: Наука, 1965.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа, часть I, часть II. - М.: Наука, 1973.
3. Рождественский Б.Л. Лекции по математическому анализу. - М.: Наука, 1972.

Глава I. ТЕОРИЯ ВЕЩЕСТВЕННОГО ЧИСЛА, КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, ВЕКТОРЫ

ВВЕДЕНИЕ

Математический анализ является одним из важнейших разделов высшей математики. Основные понятия и методы математического анализа широко используются в большинстве других разделов высшей математики.

В математическом анализе изучаются переменные величины и функции переменных величин. Под переменной величиной мы будем понимать любую величину (наблюдаемую или вымышленную), которая может принимать различные значения. Под функцией же мы будем понимать правило, посредством которого каждому значению одной переменной величины (или каждой совокупности значений нескольких переменных величин) ставится в соответствие определенное значение другой переменной величины. Переменные величины мы обычно будем обозначать буквами. Если каждому значению переменной величины x ставится в соответствие определенное значение переменной величины y по правилу, которое обозначим через f, то коротко это обстоятельство будем записывать следующим образом: $y = f(x)$.

Пример. Пусть материальная точка движется по прямой. Если через x обозначить время, за которое материальная точка пройдет путь y, то задание закона движения материальной точки означает задание функции $y = f(x)$.

Простейшие функции изучаются еще в элементарной математике. Дальнейший прогресс при изучении функций связан с широким применением понятия предельного перехода. Пределом функции $y=f(x)$ при стремлении переменной величины x к значению x_0 называется число y_0, к которому приближается значение функции $y = f(x)$. Более строгое определение понятия предела и применение этого понятия к изучению переменных величин и функций будет составлять основное содержание курса. Для этого нам понадобится прежде всего некоторое расширение понятия числа.

§ I. Определение вещественного числа. Соответствие между числами и точками прямой

В элементарной математике рассматриваются в основном рациональные числа, т.е. числа вида $\pm\frac{m}{n}$, где m и n – целые положительные числа. В анализе мы широко будем пользоваться более широким понятием числа – вещественными числами.

Существует несколько эквивалентных способов введения вещественных чисел. Мы введем это понятие с помощью бесконечных десятичных дробей. Будем называть вещественным (или действительным) числом последовательность a_0, $a_1 a_2 a_3 \dots$ целых чисел, перед которой поставлен знак + или –, причем $0 \le a_i \le 9$ при $i = 1,2 \dots$, а число a_0 является целым неотрицательным числом. Число a_0 будем отделять от других чисел запятой. Если перед числом стоит знак +, то такое число будем называть положительным, если стоит знак –, то число будем называть отрицательным. У положительного числа мы иногда будем опускать знак + .

Рассмотрим положительное число $x = a_0, a_1 a_2 \dots$. Рациональное число $x_m = a_0, a_1 a_2 \dots a_m$ (десятичную дробь с m знаками после запятой) будем называть нижним m - значным приближением числа x. Рациональное число

$$\bar{x}_m = x_m + \frac{1}{10^m}$$

будем называть верхним m - значным приближением числа x (оно отличается от x_m на единицу последнего десятичного знака). Для отрицательных вещественных чисел $x = -y$, где $y = a_0, a_1 a_2 \dots$, положим $x_m = -\bar{y}_m$, $\bar{x}_m = -y_m$.

Отметим следующие очевидные свойства чисел x_m и $\bar{x}_m$:

$$x_{m+1} \ge x_m, \quad \bar{x}_{m+1} \le \bar{x}_m \quad \text{и} \quad x_m \le \bar{x}_n$$

при любых m и n. Кроме того

$$x_{m+1} - x_m < \frac{1}{10^m}.$$

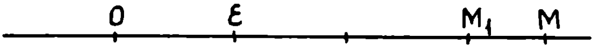
Отметим также следующее свойство:
если нам даны числа x_m с m десятичными знаками при любых

значениях $m = 1, 2, 3, \ldots$, причем

$$x_{m+1} \geq x_m, \quad x_{m+1} - x_m < \frac{1}{10^m},$$

то всегда найдется такое вещественное число x, для которого число x_m является нижним m - значным приближением (при $x_m > 0$ первые m десятичных знаков числа x совпадают с первыми m десятичными знаками числа x_m).

Рассмотренный нами способ введения вещественных чисел можно проиллюстрировать с помощью соответствия между числами и точками на прямой. Выберем на бесконечной прямой точки O и $\mathcal{E}$ (см. рисунок).



Точке O поставим в соответствие число $0,000\ldots$, а точке $\mathcal{E}$ – число $1,000\ldots$. Каждой точке M, лежащей справа от точки O поставим в соответствие вещественное число $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ следующим образом. Число a_0 положим равным максимальному числу отрезков $O\mathcal{E}$, укладывающихся внутри OM. Если при этом не остается остатка, то полагаем $a_1 = a_2 = \ldots = 0$. Если же остается остаток M_1M, по длине меньший $O\mathcal{E}$, то цифру a_1 определяем как наибольшее число отрезков $O\mathcal{E}_1 = \frac{1}{10} O\mathcal{E}$, целиком укладывающихся внутри отрезка M_1M. Продолжая этот процесс откладывания отрезков длиной $\frac{1}{100} O\mathcal{E}$, $\frac{1}{1000} O\mathcal{E}$ и т.д. находим цифры $a_2, a_3, \ldots$. Таким образом, можно определить любую цифру бесконечной десятичной дроби $x = a_0, a_1 a_2 \ldots$. Если точка M лежит слева от точки O, то ей ставится в соответствие отрицательное число $x = -y$, где число y соответствует точке, расположенной симметрично точке M относительно точки O.

Установим теперь обратное соответствие, т.е. поставим в соответствие каждому вещественному числу x определенную точку M на прямой. Достаточно рассмотреть положительные числа, так как отрицательное число $x = -y$ соответствует точке, расположенной симметрично относительно O, т.е. точке, определяемой числом y. Итак, пусть нам задано число $x = a_0, a_1 a_2 \ldots$

Рассмотрим точки M_m и M'_m, соответствующие m - значным приближениям x_m и $\bar{x}_m$. Они могут быть получены откладыванием от точки O вправо единичного отрезка OE и десятичных долей этого отрезка соответствующее число раз. Мы получаем последовательность вложенных друг в друга отрезков $M_0 M'_0$, $M_1 M'_1$, ..., $M_m M'_m$, ...

Термин "последовательность вложенных друг в друга отрезков" означает, что каждая точка M_{m+1} лежит не левее точки M_m, а каждая точка M'_{m+1} лежит не правее точки M'_m при всех $m = 1, 2, \ldots$.

Воспользуемся аксиомой Кантора для прямой: при любой последовательности вложенных отрезков $\{M_m M'_m\}$ существует по крайней мере одна точка M, принадлежащая любому из отрезков $M_m M'_m$, ($m = 1, 2 \ldots$). Эта аксиома обеспечивает свойство "непрерывности" прямой. Покажем, что в нашем случае существует лишь одна точка M, принадлежащая всем отрезкам $M_m M'_m$. Действительно, если бы существовали две таких точки – M и M', то весь отрезок MM' был бы вложен в любой из отрезков $M_m M'_m$. Но длина отрезка $M_m M'_m$ равна $\frac{1}{10^m}$, т.е. может быть меньше любого числа при достаточно большом значении m. Так как длина отрезка MM' не превышает длины отрезка $M_m M'_m$, то мы приходим к противоречию.

Итак, числу $x = a_0, a_1 a_2 \ldots$ соответствует единственная точка M на прямой. Таким образом, мы установили взаимнооднозначное соответствие между множеством вещественных чисел и множеством точек на прямой. Этим соответствием мы будем широко пользоваться для иллюстрации различных результатов, полученных нами. В частности, иногда вещественное число x мы будем называть точкой x.

§ 2. Сравнение вещественных чисел

Рассмотрим различные операции над вещественными числами. Они определяются с помощью обобщения соответствующих операций над десятичными дробями. Прежде всего рассмотрим операцию сравнения двух вещественных чисел.

Определение. Вещественное число x больше вещественного числа y (обозначение: $x > y$ или $y < x$), если существует такой номер $m \geq 0$, что $x_m > \bar{y}_m$.

Так как $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots$, а $\bar{y}_0 \geq \bar{y}_1 \geq \bar{y}_2 \ldots$, то в случае, когда неравенство $x_m > \bar{y}_m$ выполнено при каком-либо значении $m = m_0$, то оно будет выполнено при всех $m \geq m_0$. Поэтому одновременное выполнение неравенств $x > y$ и $y > x$ невозможно. В противном случае нашлись бы такие номера m_1 и m_2, что $x_m > \bar{y}_m$ при $m \geq m_1$ и $y_m > \bar{x}_m$ при $m \geq m_2$. Тогда при $m \geq max(m_1, m_2)$ (max – максимальное из значений) выполнялись бы одновременно неравенства $x_m > \bar{y}_m$ и $y_m > \bar{x}_m$, что невозможно, так как $x_m < \bar{x}_m$ и $y_m < \bar{y}_m$.

Определение. Если для вещественных чисел x и y не выполнено ни одно из неравенств $x > y$ или $y > x$, то числа x и y называются равными (обозначение: $x = y$). Если $x = y$, то для десятичных приближений этих чисел, в силу данного определения, возможно лишь одно из соотношений: $x_m = y_m$, $x_m = \bar{y}_m$, $y_m = \bar{x}_m$. Заметим, что равенства $x_m = \bar{y}_m$ или $y_m = \bar{x}_m$ возможны лишь в том случае, когда у одного из чисел все десятичные знаки, начиная с некоторого, равны 9, например, для чисел вида $x = a_0, a_1 \ldots a_{\ell-1} a_\ell 00 \ldots$, $y = a_0, a_1 \ldots a_{\ell-1}(a_\ell - 1)99$ (в этом случае $x_m = \bar{y}_m$ при $m \geq \ell$). Таким образом, некоторые равные друг другу числа могут иметь разные представления в виде бесконечных десятичных дробей. Числа вида $x = \pm a_0, a_1 \ldots a_\ell 000 \ldots$ будем отождествлять с числами $\pm a_0, a \ldots a_\ell$ – с конечным числом десятичных знаков.

Итак, между любыми двумя вещественными числами x и y выполнено одно из трех взаимно исключающих друг друга соотношений: $x > y$, $y > x$, $x = y$.

Отметим следующее очевидное свойство операции сравнения (свойство транзитивности): если $x > y$ и $y > z$, то $x > z$.

Действительно, пусть $x > y$ и $y > z$. Тогда существуют такие номера m_1 и m_2, что $x_m > \bar{y}_m$ при $m \geq m_1$ и $y_m > \bar{z}_m$ при $m \geq m_2$. Поэтому при $m \geq \max(m_1, m_2)$ одновременно выполняются неравенства $x_m > \bar{y}_m$ и $y_m > \bar{z}_m$. Так как $\bar{y}_m > y_m$, то отсюда непосредственно вытекает, что $x_m > \bar{y}_m > \bar{z}_m$, т.е. $x > z$. Также легко доказывается свойство транзитивности для знака равенства.

Рассмотрим удобный для применения признак равенства двух действительных чисел.

Лемма. Пусть при любом $\varepsilon > 0$ для двух действительных чисел x и y найдутся такие числа x и y с конечным числом десятичных знаков, что $\alpha \leq x \leq \beta$, $\alpha \leq y \leq \beta$, $\beta - \alpha < \varepsilon$. Тогда $x = y$.

Доказательство. Предположим, что $y > x$. Тогда при некотором значении m имеем $y_m > \bar{x}_m$, откуда

$$\alpha \leq x \leq \bar{x}_m < y_m \leq \beta$$ и, следовательно,

$$0 < y_m - \bar{x}_m < \beta - \alpha .$$

При $\beta - \alpha < \varepsilon < \frac{1}{10^m}$ это неравенство возможно лишь в случае $y_m = \bar{x}_m$, что противоречит неравенству $y_m > \bar{x}_m$. Аналогично доказывается невозможность неравенства $y < x$.

Согласно определению операции сравнения, имеем: $x_m \leq x \leq \bar{x}_m$. Поскольку $\bar{x}_m - x_m = \frac{1}{10^m}$, то каждое из рациональных чисел x_m, $\bar{x}_m$ является приближенным значением числа x с точностью до $\frac{1}{10^m}$ (первое с недостатком, второе с избытком).

§ 3. Точные грани числового множества

Прежде, чем определять арифметические действия над вещественными числами, мы установим некоторые свойства произвольного множества вещественных чисел (числового множества). Рассмотрим предварительно ряд определений и обозначений для множества объектов любой природы.

Будем называть множеством совокупность объектов, объединенных по какому-либо признаку. Объекты, входящие в рассматриваемое множество, будем называть элементами этого множества. Принадлежность элемента x множеству A обозначается следующим образом: $x \in A$. Противное обозначается $x \notin A$ или $x \bar{\in} A$.

Определение. Множество A называется подмножеством множества B, если все элементы множества A являются одновременно и элементами множества B. Обозначение: $A \subset B$.

Символ $A \subseteq B$ означает, что $A \subset B$ и A могут совпадать с B.

Определение. Совокупность всех элементов множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ является некоторым множеством C, которое называется объединением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Обозначение: $C = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Удобно ввести в рассмотрение множество, не содержащее ни одного элемента. Такое множество называется пустым и обозначается через ϕ. Это множество является, очевидно, подмножеством любого множества.

Определение. Совокупность элементов, принадлежащих одновременно всем множествам $A_1, A_2, \ldots A_n$, является некоторым множеством C, которое называется пересечением множеств $A_1, A_2, \ldots A_n$. Обозначение:
$C = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Если $\bigcap\limits_{i=1}^{2} A_i = \phi$, то, очевидно, множества A_1 и A_2 не имеют общих элементов.

Среди всех множеств можно выделить класс так называемых упорядоченных множеств, т.е. множеств, между произвольными элементами которых можно ввести операцию сравнения, обладающую свойством транзитивности. Одним из упорядоченных множеств является числовое множество. Примеры числовых множеств:

1) множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, называется интервалом и обозначается через (a,b) или (b,a);

2) множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \leq x \leq b$, называется сегментом и обозначается через $[a,b]$ или $[b,a]$;

3) множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $a \le x < b$, называется полуинтервалом и обозначается через $[a, b)$ или $(b, a]$. Аналогичный смысл имеют обозначения полуинтервалов $(a, b]$ или $[b, a)$.

Определение. Числовое множество A называется ограниченным сверху (снизу), если существует такое число C, что для всех элементов $x \in A$ выполнено неравенство $x \le C$ $(x \ge C)$. Число C называется верхней (нижней) гранью множества A.

В этом определении мы, как и всюду в дальнейшем изложении, объединяем два противоположных определения (одно из них соответствует словам, заключенным в скобки).

Если множество ограничено сверху и снизу, то оно называется ограниченным. Наименьшая (наибольшая) из всех верхних (нижних) граней называется точной верхней (нижней) гранью множества A и обозначается через $\sup A$ ($\inf A$). Читается: супремум A (инфимум A). Если множество A не ограничено сверху, то иногда используют обозначение $\sup A = +\infty$. Аналогичный смысл имеет обозначение $\inf A = -\infty$.

Отметим признак, позволяющий установить, что число C, действительно, является точной верхней (нижней) гранью: для всех $x \in A$ выполнено неравенство $x \le C$ $(x \ge C)$, причем при $x' < C$ ($x' > C$) найдется такой элемент $x \in A$, что $x > x'$ $(x < x')$. Действительно, из этих условий вытекает, что число C является верхней (нижней) гранью множества A, причем наименьшей (наибольшей) из всех верхних (нижних) граней.

Докажем, что любое числовое множество имеет точную верхнюю и нижнюю грань.

Теорема. У всякого непустого ограниченного сверху (снизу) числового множества существует точная верхняя (нижняя) грань.

Доказательство. Пусть множество A ограничено сверху, т.е. существует такое число b, что для всех $x \in A$ выполнено неравенство $x \le b$. Построим непосредственно точную верхнюю грань C этого множества. Для этого укажем, как находить m-значные приближения для числа C.

Так как множество A не пусто, то найдется такое число a $(a < b)$, что имеется хотя бы один элемент $x \in A$, который удовлетворяет неравенствам $a \leq x \leq b$. Рассмотрим m-значные приближения x_m для элементов $x \in A$, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$. Хотя множество таких элементов может быть бесконечным, множество значений x_m будет конечным, так как на отрезке $[a, b]$ содержится конечное число чисел, имеющих m знаков после запятой (не больше, чем $(b_m - a_m) \cdot 10^m$). Пусть c_m – максимальное из чисел x_m. Так как число c_m имеет m знаков после запятой, $c_{m+1} \geq c_m$ и $c_{m+1} - c_m < \frac{1}{10^m}$, то числа c_m служат нижними m-значными приближениями некоторого вещественного числа c. Покажем, что число c является точной верхней гранью множества A. Докажем сначала, что удовлетворяется неравенство $x \leq c$ для всех $x \in A$. Предположим противное, т.е. для некоторого числа $x \in A$ выполняется неравенство $x > c$. В таком случае для достаточно большого номера m выполняется неравенство $x_m > \overline{c}_m > c_m$, что невозможно, в силу определения числа c_m. Покажем теперь, что при $x' < c$ найдется такой элемент $x \in A$, что $x > x'$. Действительно, из неравенства $x' < c$ вытекает неравенство $c_m > \overline{x}'_m$ для достаточно большого номера a_m. Отсюда, в силу того, что $\overline{x}'_m \geq x'$ и число c_m является нижним m-значным приближением некоторого числа $x \in A$, приходим к следующим неравенствам $x \geq x_m = c_m > \overline{x}'_m \geq x'$, т.е. $x > x'$, что и требовалось доказать. Таким образом, число c удовлетворяет признаку, определяющему точную верхнюю грань множества A, т.е. $c = \sup A$. Аналогично доказывается существование точной нижней грани у непустого ограниченного снизу числового множества. Теорема доказана.

Заметим, что в процессе доказательства мы получили неравенства:

$$x_m \leq (\sup A)_m \leq \sup A, \quad x_m \geq (\inf A)_m \geq \inf A$$

для всех $x \in A$.

Так как для неограниченного сверху числового множества A мы положили $\sup A = +\infty$, а для неограниченного снизу числового множества $\inf A = -\infty$, то можно считать, что любое числовое множество имеет конечную или бесконечную точную верхнюю (нижнюю) грань.

§ 4. Арифметические операции

Будем считать определение и основные свойства арифметических операций над рациональными числами известными. Определим арифметические операции над произвольными вещественными числами.

Определение. Пусть α_1, α_2, β_1 и β_2 – любые числа с конечным числом десятичных знаков, удовлетворяющие при заданных вещественных числах x и y неравенствам: $\alpha_1 \le x \le \alpha_2$, $\beta_1 \le y \le \beta_2$ (в качестве чисел α_1, α_2, β_1, β_2 можно брать, например, десятичные приближения для чисел x и y).

Суммой вещественных чисел x и y назовем вещественное число z, удовлетворяющее неравенствам $\alpha_1+\beta_1 \le z \le \alpha_2+\beta_2$. Обозначение: $z = x+y$. Произведением вещественных неотрицательных чисел x и y назовем вещественное число z, удовлетворяющее неравенствам $\alpha_1\beta_1 \le z \le \alpha_2\beta_2$, $\alpha_1 \ge 0$, $\beta_1 \ge 0$. Обозначение: $z = x \cdot y$.

Докажем существование чисел $x+y$ и $x \cdot y$. Зафиксируем числа α_2, β_2. Так как $\alpha_1 \le \alpha_2$, $\beta_1 \le \beta_2$, то $\alpha_1+\beta_1 \le$ $\le \alpha_2+\beta_2$. Покажем, что $x+y$ является точной верхней гранью множества чисел вида $\alpha_1+\beta_1$. Это множество ограничено сверху числом $\alpha_2+\beta_2$ и поэтому точная верхняя грань его, равная z, существует. При этом $\alpha_1+\beta_1 \le z \le \alpha_2+\beta_2$. Так как разности $(\alpha_2-\alpha_1)$ и $(\beta_2-\beta_1)$ можно сделать сколь угодно малыми, то при любом $\varepsilon > 0$ можно так выбрать числа α_1, α_2, β_1 и β_2, чтобы выполнялось неравенство $(\alpha_2+\beta_2)-(\alpha_1+\beta_1) < \varepsilon$. Поэтому по лемме (из § 2) число $z = x+y$ единственно. Если зафиксировать числа α_1 и β_1 и рассматривать произвольные числа α_2 и β_2, то таким же способом можно доказать, что $x + y = \inf(\alpha_2 + \beta_2)$. Аналогично доказывается существование числа $x \cdot y$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$ и равенства:

$$x \cdot y = \sup(\alpha_1 \cdot \beta_1) = \inf(\alpha_2 \cdot \beta_2) \quad (\alpha_1 \geq 0,\ \beta_1 \geq 0).$$

Произведение $x \cdot y$ мы иногда, для краткости, будем обозначать через xy (опускать точку).

После того, как определены операции сложения и умножения, вводятся обратные операции вычитания и деления, а также действия с отрицательными числами. Это хорошо известно из курса элементарной математики. В частности, разность и частное двух вещественных чисел можно определить известным способом:

$$x - y = x + (-y)$$

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}.$$

Здесь $-y$ - число, противоположное по знаку числу y, а $\frac{1}{y}$ - число, удовлетворяющее равенству $y \cdot \frac{1}{y} = 1$. Легко показать, что число $\frac{1}{y}$ существует, если $y \neq 0$. В частности, при $y > 0$ $\frac{1}{y} = \inf\limits_m \left(\frac{1}{y_m}\right)$ (проверка предоставляется читателю).

Из определения арифметических операций и операций сравнения, а также из свойств этих операций над рациональными числами вытекают следующие свойства арифметических операций и операций сравнения:

1) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$; если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$;

2) $a + b = b + a$;

3) $a \cdot b = b \cdot a$;

4) $(a + b) + c = a + (b + c)$;

5) $a + 0 = a$; $(0 = 0{,}000\ \ldots)$;

6) $a \cdot 1 = a$ $(1 = 1{,}000\ \ldots)$;

7) $a + (-a) = 0$;

8) $a \cdot \frac{1}{a} = 1$;

9) $(a+b)c = ac+bc$;

10) $(a\cdot b)c = a\cdot(b\cdot c)$;

11) если $a>b$, то $a+c>b+c$;

12) если $a>b$ и $c>0$, то $a\cdot c > b\cdot c$;

13) каково бы ни было вещественное число a, можно число 1 столько раз повторить слагаемым, что полученная сумма превзойдет x (аксиома Архимеда).

Некоторые из этих свойств мы уже рассматривали. Свойства 5 и 6 непосредственно вытекают из определения арифметических действий. Остается рассмотреть свойства 9-13 и 4.

Пусть a, b, c – произвольные вещественные числа, а числа $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ имеют конечное число десятичных знаков и удовлетворяют неравенствам:

$$\alpha_1 \le a \le \alpha_2, \quad \beta_1 \le b \le \beta_2, \quad \gamma_1 \le c \le \gamma_2 .$$

Рассмотрим свойство 4. Имеем

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = (\alpha_1+\beta_1)+\gamma_1 \le (a+b)+c \le (\alpha_2+\beta_2)+\gamma_2 = \alpha_2+\beta_2+\gamma_2;$$

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = \alpha_1+(\beta_1+\gamma_1) \le a+(b+c) \le \alpha_2+(\beta_2+\gamma_2) = \alpha_2+\beta_2+\gamma_2.$$

Так как при любом $\varepsilon>0$ можно так выбрать числа $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$, чтобы выполнялись неравенства:

$$(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)-(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1) = (\alpha_2-\alpha_1)+(\beta_2-\beta_1)+(\gamma_2-\gamma_1) < \varepsilon,$$

то по лемме из § 2 имеем:

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

Свойства 9 и 10 рассматриваются аналогично.

Докажем справедливость свойства 11. Так как $a>b$, то можно так выбрать числа α_1, β_2, чтобы удовлетворялись неравенства $a \ge \alpha_1 > \beta_2 \ge b$. Выберем теперь числа γ_1 и γ_2 из условия: $\gamma_2-\gamma_1 < \alpha_1-\beta_2$. Так как $a+c \ge \alpha_1+\gamma_1$, $\beta_2+\gamma_2 \ge b+c$, то в силу неравенства $\alpha_1+\gamma_1 > \beta_2+\gamma_2$ имеем: $a+c \ge \alpha_1+\gamma_1 > \beta_2+\gamma_2 \ge b+c$, т.е.

$a + c > b + c$.

Аналогично доказывается свойство 12. Свойство 13 при $a \le 0$ выполняется, если $n = 1$. Если же $a = a_0, a_1, a_2 \dots$, то для выполнения свойства 13 достаточно положить $n = a_0 + 2$.

Таким образом, на случай вещественных чисел переносятся все основные свойства рациональных чисел и поэтому для вещественных чисел сохранят свою силу все правила алгебры, относящиеся к арифметическим действиям и к сочетанию равенств и неравенств. В частности, в лемме (из § 2) можно опустить требование конечности числа десятичных знаков чисел α и β.

Пример. Пусть $x_m, \bar{x}_m, y_m, \bar{y}_m$ - m - значные приближения для чисел x и y. Показать, что

$$x + y = \sup_m (x_m + y_m) = \inf_m (\bar{x}_m + \bar{y}_m),$$

а при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$

$$x \cdot y = \sup_m (x_m \, y_m) = \inf_m (\bar{x}_m \cdot \bar{y}_m).$$

§ 5. Степени вещественных чисел

Покажем, как можно определить при $a > 0$ выражение a^x для любых вещественных значений x с сохранением всех свойств степени, известных из алгебры. Если n - целое положительное число, то $a^n = a \cdot a \cdot \ldots a$ (произведение n одинаковых сомножителей). Число a^{-n} определяется с помощью равенства

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Кроме того, положим $a^0 = 1$. Тогда для любых целых степеней справедливы следующие соотношения:

1) пусть $x_1 < x_2$. Если $a > 1$, то $a^{x_1} < a^{x_2}$, если же $a < 1$, то $a^{x_1} > a^{x_2}$ $(1^x = 1)$;

2) $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$, $\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1 - x_2}$;

3) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$;

4) $(a\cdot b)^x = a^x\cdot b^x$, $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Напомним формулу, называемую биномом Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\cdot a^k\cdot b^{n-k} .$$

Здесь $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ $(n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n)$, а выражения вида $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k$ означают сумму $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ (Σ – знак суммы). Величины C_n^k называются биномиальными коэффициентами. Справедливость формулы бинома Ньютона можно доказать по индукции, если воспользоваться легко проверяемыми соотношениями:

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1} \quad \text{при } k\ge 1 , \quad C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1 .$$

(Проверка предоставляется читателю.)

Получим удобные для дальнейшего изложения оценки для величины α , удовлетворяющей неравенству $1 < (1+\alpha)^n \le a$ $(n=1,2,3,\ldots)$ при $a>1$. Очевидно, что $\alpha>0$, и по формуле бинома Ньютона получаем:

$$(1+\alpha)^n = 1+n\alpha+\frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2+\ldots > 1+n\alpha .$$

Поэтому $\alpha < \frac{a-1}{n}$.

Покажем теперь, что при любом $a>0$, для любого положительного числа n существует такое число x , что $x^n=a$. (Обозначение: $x=a^{\frac{1}{n}}$ или $x=\sqrt[n]{a}$).

Рассмотрим числа b_m с m -десятичными знаками после запятой, удовлетворяющие неравенству $b_m^n\le a$. Легко проверить, что $b_m<a+1$. Поэтому существует максимальное из чисел b_m , которое обозначим через x_m . По построению $x_{m+1}\ge x_m$; $x_{m+1}-x_m<\frac{1}{10^m}$, т.е. числа x_m можно считать нижними m -значными приближениями некоторого действительного числа x . Числа x и a удовлетворяют неравенствам:

$$x_m^n\le x^n\le \bar{x}_m^n , \quad x_m^n\le a\le \bar{x}_m^n ,$$

где

$$\bar{x}_m = x_m+\frac{1}{10^m} .$$

Оценим разности:

$$\bar{x}_m^n - x_m^n = \left(x_m + \frac{1}{10^m}\right)^n - x_m^n \quad ;$$

$$\bar{x}_m^n - x_m^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \left(\frac{1}{10^m}\right)^k x_m^{n-k} \le \frac{1}{10^m} \sum_{k=1}^{n} C_n^k x^{n-k} = \frac{(x+1)^n - 1}{10^m} \; .$$

Если при любом $\varepsilon > 0$ выбрать m из условия:

$$10^m > \frac{(x+1)^n - 1}{\varepsilon} \; ,$$

то будет выполняться неравенство:

$$\bar{x}_m^n - x_m^n < \varepsilon \; .$$

Поэтому по признаку равенства двух чисел (см. лемму из § 2) имеем $x^n = a$, т.е. существует число $x = a^{1/n}$.

Определим теперь выражение a^x при произвольном рациональном числе x , полагая:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m , \qquad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{m/n}} \qquad (m \ge 0) \; .$$

Можно проверить, что при этом сохраняются все рассмотренные ранее свойства степеней. Пусть теперь $a > 1$ и x – произвольное вещественное положительное число, а x_m, $\bar{x}_m$ – его m – значные приближения. Положим

$$a^x = \sup_m \left(a^{x_m}\right) .$$

Величина $\sup\limits_m \left(a^{x_m}\right)$

означает точную верхнюю грань множества, элементами которого являются числа a^{x_m} .

Такое число существует, в силу неравенства:

$$a^{x_m} < a^{\bar{x}_n}$$

при любых m и n . Из этого же неравенства вытекает, что

$$a^x = \inf \left(a^{\bar{x}_m}\right) .$$

Действительно,

$$a^{x_m} \le \sup_m \left(a^{x_n}\right) \le \inf_n \left(a^{\bar{x}_n}\right) \le a^{\bar{x}_m} \; .$$

Покажем, что при любом $\varepsilon > 0$ можно выбрать m таким образом, чтобы выполнялось неравенство $a^{\bar{x}_m} - a^{x_m} < \varepsilon$.

Имеем

$$a^{\bar{x}_m} - a^{x_m} = a^{x_m}\left(a^{\frac{1}{10^m}} - 1\right) \le a^{x}\left(a^{\frac{1}{10^m}} - 1\right) = \alpha a^{x},$$

где α - корень уравнения $(1+\alpha)^{\frac{1}{10^m}} = a$.

В силу полученных ранее оценок, имеем $0 < \alpha < \frac{a-1}{10^m}$.

Если выбрать m из условия $\frac{a-1}{10^m} \cdot a^{x} < \varepsilon$, то

$$a^{\bar{x}_m} - a^{x_m} < \varepsilon$$

и по лемме (см. §2) имеем:

$$a^{x} = \sup_n \left(a^{x_n}\right) = \inf_n \left(a^{\bar{x}_n}\right).$$

При $a < 1$, $x > 0$ полагаем,

$$a^{x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{x}};$$

а при $x < 0$ полагаем,

$$a^{x} = \frac{1}{a^{-x}}.$$

Можно проверить, что при таком определении выражения вида a^{x} обладают всеми рассмотренными ранее свойствами целых степеней.

§ 6. Предельные точки числового множества

Продолжим изучение числовых множеств. Рассмотрим предварительно ряд определений. Модулем числа x будем называть число $|x|$, определяемое следующим образом:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при } x \ge 0 \\ -x & \text{при } x \le 0. \end{cases}$$

Определение. ε - окрестностью точки a назовем множество вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенству

$|x-a| < \varepsilon$, т.е. $-\varepsilon < x-a < \varepsilon$.

Определение. Точка x называется предельной точкой множества A , если в любой ε - окрестности точки x находятся точки $y \in A$, отличные от x .

Можно показать, что любая ε - окрестность предельной точки содержит бесконечное число элементов множества A . Действительно, пусть в ε - окрестности точки x содержится конечное число элементов $x_1, x_2, \dots, x_n$. Рассмотрим ε_1 - окрестность точки x , где $\varepsilon_1 = \min\limits_i |x_i - x|$. В этой окрестности нет ни одной точки множества A , так как $|x_i - x| \geqslant \varepsilon_1$. Поэтому точка x не может быть предельной.

С помощью понятия окрестности и предельной точки можно выделить специальные классы множеств - замкнутые и открытые множества.

Определение. Точка $x \in A$ называется внутренней, если имеется некоторая окрестность этой точки, целиком содержащаяся во множестве A . Если множество A состоит из внутренних точек, то оно называется открытым. Если множество A содержит все свои предельные точки, то оно называется замкнутым.

Пример открытого множества - интервал (a, b) , пример замкнутого множества - сегмент $[a, b]$ (проверка предоставляется читателю).

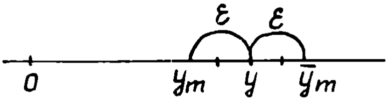
Рассмотрим условия, обеспечивающие существование предельной точки у числового множества.

Теорема Больцано-Вейерштрасса. У всякого бесконечного ограниченного числового множества A существует, по крайней мере, одна предельная точка.

Доказательство. Укажем на способ непосредственного определения самой правой из предельных точек. Так как множество A ограничено, то существует такое число C , что для всех $x \in A$ будет выполнено неравенство $|x| \leq C$.

Не ограничивая общности, можно считать число C целым, так как в случае невыполнения этого условия вместо C можно взять, не нарушая неравенства, любое целое число, большее C . Рассмотрим сегменты вида $[k, k+1]$, где k - целое число, удовлетворяющее неравенству: $-c \le k \le c-1$. По крайней мере в одном из этих сегментов содержится бесконечное число элементов множества A.

Рассмотрим самый правый из этих сегментов и назовем его $[y_0, \bar{y}_0]$. Разобьем этот сегмент на 10 равных по длине сегментов. По крайней мере в одном из этих сегментов содержится бесконечное число элементов множества A. Назовем самый правый из таких сегментов $[y_1, \bar{y}_1]$. Продолжая процесс деления сегментов на 10 частей, мы получим сегменты $[y_m, \bar{y}_m]$ ($m = 0, 1, 2 \ldots$), причем может существовать лишь конечное число элементов $x \in A$, которые удовлетворяют неравенству $x > \bar{y}_m$. Сегмент $[y_m, \bar{y}_m]$ имеет длину $\frac{1}{10^m}$ и содержит бесконечное число элементов множества A. Числа y_m и $\bar{y}_m$ по самому способу построения имеют m знаков после запятой, причем $y_{m+1} \ge y_m$, $y_{m+1} - y_m < \frac{1}{10^m}$, $\bar{y}_{m+1} \le \bar{y}_m$, $\bar{y}_m - y_m = \frac{1}{10^m}$. Поэтому числа y_m и $\bar{y}_m$ можно считать верхними и нижними m - значными приближениями некоторого вещественного числа y. Покажем, что y и является предельной точкой множества A. Действительно, рассмотрим произвольную ε - окрестность точки y и выберем номер m из условия $\frac{1}{10^m} < \varepsilon$. Тогда сегмент $[y_m, \bar{y}_m]$ будет целиком содержаться в ε - окрестности точки y (см. рис.).



Поэтому в ε - окрестности точки y будет содержаться бесконечное число элементов множества A, т.е. y является предельной точкой множества A. С другой стороны, так как правее точки $\bar{y}_m$ содержится лишь конечное число элементов при любом значении m, то y является самой правой из предельных точек. Мы доказали существование самой правой предельной точки. Аналогично доказывается существование самой левой предельной точки. Теорема доказана.

§ 7. Комплексные числа

Формально комплексные числа можно определить как пары (x , y) действительных чисел, для которых определены понятие равенства и арифметические действия следующим образом:

I) равенство $(x, y) = (x_1, y_1)$ имеет место тогда и только тогда, когда $x = x_1$, $y = y_1$.

2) $(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$,

$$(x, y) - (x_1, y_1) = (x - x_1, y - y_1),$$

$$(x, y) \cdot (x_1, y_1) = (xx_1 - yy_1, xy_1 + x_1y),$$

$$\frac{(x, y)}{(x_1, y_1)} = \left(\frac{xx_1 + yy_1}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{x_1y - xy_1}{x_1^2 + y_1^2}\right).$$

Для пар вида (x, 0) и только для них вводится операция сравнения: (x, 0) $<$ (x_1 , 0), если $x < x_1$.

Имеет место очевидное взаимно-однозначное соответствие $x \sim (x, 0)$ (с сохранением соответствия для операций сравнения и арифметических операций) между парами (x, 0) и действительными числами. Поэтому пару (x, 0) можно отождествить с действительным числом x : $x = (x, 0)$. Итак, множество пар (x, y) содержит в себе в качестве подмножества все действительные числа.

Легко проверяется, что операции над парами (x, y) обладают всеми свойствами соответствующих операций над действительными числами (кроме свойств, связанных с операцией сравнения для пар (x, y) при $y \neq 0$).

Мы положили $x = (x, 0)$. Удобно также ввести обозначение $i = (0, 1)$. Тогда комплексное число (x, y) можно записать в виде $(x, y) = x + iy$. Над числами $x + iy$ можно производить все арифметические действия, как и над действительными числами, помня только, что $i^2 = i \cdot i = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$. Например:

$$\frac{(x,y)}{(x_1,y_1)} = \frac{x+iy}{x_1+iy_1} = \frac{(x+iy)(x_1-iy_1)}{(x_1+iy_1)(x_1-iy_1)} =$$

$$\frac{xx_1 - i^2yy_1 + i(x_1y - xy_1)}{x_1^2 - i^2y_1^2} = \frac{xx_1+yy_1}{x_1^2+y_1^2} +$$

$$+ i\,\frac{x_1y-xy_1}{x_1^2+y_1^2} = \left(\frac{xx_1+yy_1}{x_1^2+y_1^2},\ \frac{x_1y-xy_1}{x_1^2+y_1^2}\right).$$

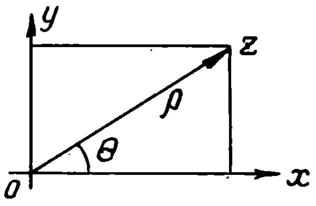
Часто удобно комплексное число $x+iy$ обозначать одной буквой: $z = x+iy$. Число x называется действительной (вещественной) частью комплексного числа z, число y называется мнимой частью комплексного числа z. Обозначения: $x = Re\,z$, $y = Jm\,z$. Комплексное число $\bar z = x - iy$ называется сопряженным комплексному числу $z = x+iy$.

Очевидно, что $Re\,z = \dfrac{z+\bar z}{2}$, $Jm\,z = \dfrac{z-\bar z}{2i}$,

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar z_1 \pm \bar z_2, \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar z_1 \bar z_2,$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar z_1}{\bar z_2}.$$

Комплексные числа удобно изображать точками на плоскости. При этом в декартовой системе координат по оси x откладываются действительные части комплексных чисел z, а по оси y — мнимые части.



Перейдем на плоскости к полярным координатам ρ, θ:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta,$$

где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Величина $\rho \geq 0$ называется модулем числа $z = x + iy$ и обозначается через $|z|$. Очевидно, что $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$, $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Величина θ называется аргументом числа z (обозначение $\theta = \arg z$). Эта величина определяется с точностью до слагаемого вида $2\pi n$ (n – целое число). Итак, $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Отметим следующие свойства чисел ρ и θ: $z = 0$ тогда и только тогда, когда $|z| = 0$; если

$$z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

то $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$,

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi,$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi,$$

(k – целое число).

Покажем, что модуль комплексного числа обладает теми же свойствами, что и модуль действительного числа. Мы отмечали уже равенства

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Остается доказать справедливость неравенства:

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Будем исходить из очевидного неравенства $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$.

Имеем: $|z_1 \pm z_2|^2 = (z_1 \pm z_2)(\bar{z}_1 \pm \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm$

$$\pm (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2).$$

Но $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 2Re\,(z_1\cdot\bar{z}_2)$.

Поэтому $|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|Re(z_1\bar{z}_2)| \leq |z_1 \pm z_2| \leq$

$$\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|Re(z_1\cdot\bar{z}_2)|.$$

Но $|Re(z_1\cdot\bar{z}_2)| \leq |z_1\cdot\bar{z}_2| = |z_1|\cdot|z_2|$.

Отсюда $(|z_1| - |z_2|)^2 \leq |z_1 \pm z_2|^2 \leq (|z_1| + |z_2|)^2$.

Извлекая квадратные корни в этом неравенстве, получим:

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

С помощью понятия модуля комплексного числа многие определения и результаты, рассмотренные нами для множества действительных чисел,можно распространить на множества комплексных чисел:

1) множество A комплексных чисел называется ограниченным, если найдется такое число $C > 0$, что для всех $z \in A$ выполняется неравенство $|z| \leq C$.

2) ε - окрестностью комплексного числа C назовем множество комплексных чисел z, для которых справедливо неравенство $|z - C| < \varepsilon$.

Без изменения вводятся с помощью понятия ε - окрестности понятия внутренней и предельной точки множества, определение открытого и замкнутого множества.

§ 8. Векторные пространства

Упорядоченную систему $z = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$ из m действительных (или комплексных) чисел $z_1, \ldots, z_m$ будем называть вектором или точкой m -мерного действительного (или комплексного) пространства R_m, если для таких систем чисел определены понятия равенства и арифметические действия сложения и умножения на число по следующим правилам.

Пусть $u=(u_1,\dots,u_m)$, $v=(v_1,\dots,v_m)$.

Тогда: I) $u+v=(u_1+v_1,\dots,u_m+v_m)$,

$u-v=(u_1-v_1,\dots,u_m-v_m)$;

2) $cu=(cu_1,\dots,cu_m)$ (c - число) ;

3) $u=v$, если $u_k=v_k$ $(k=1,\dots,m)$.

Число u_k будем называть компонентой с номером k вектора u.

Отметим следующие свойства введенных действий:

I) $u+v=v+u$; 2) $(u+v)+w=u+(v+w)$;

3) из $u+v=u+w$ следует $v=w$;

4) $cu+cv=c(u+v)$ (c - число);

5) $c_1u+c_2u=(c_1+c_2)u$ (c_1, c_2 - числа);

6) $c_1(c_2u)=(c_1\cdot c_2)u$; 7) $1\cdot u=u$.

В дальнейшем удобно пользоваться сокращенной записью

$0=(0,0,\dots,0)$.

Кроме действий сложения и умножения на число (и обратных действий: вычитания, деления на число), для любых двух векторов можно ввести понятие скалярного произведения.

Пусть $u=(u_1,\dots,u_m)$, $v=(v_1,\dots,v_m)$, тогда скалярное произведение $u\cdot v$ определяется следующим образом: $u\cdot v=\sum\limits_{k=1} u_k\,\bar{v}_k$ (черта - знак комплексного сопряжения). Отметим следующие свойства скалярного произведения:

1) $u\cdot v=\overline{v\cdot u}$ (черта - знак комплексного сопряжения)

2) $(\alpha u+\beta v)\cdot w=\alpha(u\cdot w)+\beta(v\cdot w)$,

$$u\cdot(\alpha v+\beta w)=\bar{\alpha}(u\cdot v)+\bar{\beta}(u\cdot w)\,,$$

3) $u\cdot u\geq 0$ для любого u , причем $u\cdot u=0$ лишь при $u=0$.

Из этих свойств можно вывести неравенство Коши - Буняковского $|u\cdot v|\leq\sqrt{(u\cdot u)(v\cdot v)}$.

Доказательство. Пусть λ - произвольное комплексное число. Тогда

$$(u+\lambda v)(u+\lambda v)\geq 0 \qquad (\,u,\ v \text{ - векторы})\,.$$

Но

$$(u+\lambda v)\cdot(u+\lambda v)=(u+\lambda v)\cdot u+\bar{\lambda}(u+\lambda v)\cdot v=$$

$$=u\cdot u+\lambda(v\cdot u)+\bar{\lambda}(u\cdot v)+|\lambda|^2(v\cdot v)\,.$$

Если $(v\cdot v)\neq 0$, то, положив $\lambda=-\dfrac{(u\cdot v)}{(v\cdot v)}$, получим $u\cdot u + \dfrac{|u\cdot v|^2}{v\cdot v} - 2\,\dfrac{|u\cdot v|^2}{v\cdot v} \geq 0$, т.е.

$|u\cdot v|^2 \leq (u\cdot u)(v\cdot v)$, что равносильно неравенству Коши - Буняковского. Если $(v\cdot v) = 0$, то $v = 0$ и неравенство Коши-Буняковского также справедливо, так как $u\cdot v = 0$. В развернутом виде неравенство Коши-Буняковского можно записать следующим образом:

$$\left|\sum_{k=1}^{m} u_k \bar{v}_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |u_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} |v_k|^2} \;.$$

Мы часто будем пользоваться неравенством Коши-Буняковского для произвольных совокупностей действительных или комплексных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ и $b_1, b_2, \ldots, b_m$:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |a_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} |b_k|^2} \;.$$

Это равенство получается из только что рассмотренного, если ввести векторы $u = (a_1, \ldots, a_m)$, $v = (\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m)$, где черта - знак комплексного сопряжения.

С помощью понятия скалярного произведения можно ввести понятие модуля (нормы) вектора: $|u| = \sqrt{u\cdot u}$. Отметим важные свойства модуля вектора: $|u_k| \leq |u|$

(u_k - компонента вектора u);

$\big||u| - |v|\big| \leq |u \pm v| \leq |u| + |v|$.

Неочевидным является лишь второе свойство. Для доказательства справедливости этого свойства будем исходить из соотношений:

$$|u\pm v|^2 \equiv (u\pm v)(u\pm v) = |u|^2+|v|^2 \pm [u\cdot v + v\cdot u] =$$

$$= |u|^2+|v|^2 \pm 2\,Re\,(u\cdot v)\ .$$

Так как

$$|Re\,(u\cdot v)| \le |u\cdot v|, \quad \text{то} \quad |u|^2+|v|^2-2\,|u\cdot v| \le |u\pm v|^2 \le$$

$$\le |u|^2+|v|^2+2\,|u\cdot v|\ .$$

Согласно неравенству Коши-Буняковского, имеем $|u\cdot v| \le |u|\cdot|v|$. Поэтому

$$(|u|-|v|)^2 \le |u\pm v|^2 \le (|u|+|v|)^2$$

и, следовательно,

$$||u|-|v|| \le |u\pm v| \le |u|+|v|\ .$$

Отметим следующую оценку модуля вектора c , являющегося произведением матрицы $A=(a_{ij})$ на вектор b , т.е. вектора с компонентами $c_i = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} b_j \quad (i=1,2,\dots,m)$;

$$|c| \le \|A\|\cdot|b| \quad , \qquad \text{где} \quad \|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}|^2}\ .$$

Число $\|A\|$ называется нормой матрицы A .

Приведенное выше неравенство доказывается с помощью неравенства Коши-Буняковского. Действительно,

$$|c_i| = \Big|\sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_j\Big| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2 \sum_{j=1}^{m} |b_j|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2 |b|^2}\ .$$

Отсюда

$$|c| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |c_i|^2} \le \|A\| \cdot |b| .$$

Норма матрицы обладает следующими свойствами:

$$\big| \|A\| - \|B\| \big| \le \|A \pm B\| \le \|A\| + \|B\|$$

$$\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\| .$$

Первое неравенство легко получить, рассматривая вектор, компоненты которого являются элементами матрицы. Второе неравенство является следствием неравенства Коши-Буняковского. Действительно, пусть

$$C = A \cdot B \qquad \text{т.е.} \qquad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} .$$

Тогда

$$|c_{ij}|^2 \le \sum_{k=1}^{m} |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{m} |b_{kj}|^2 ,$$

откуда

$$\|c\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |c_{ij}|^2 \le \Big(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} |a_{ik}|^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |b_{kj}|^2\Big) =$$

$$= \|A\|^2 \cdot \|B\|^2 .$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей этого неравенства, получим $\|C\| \le \|A\| \cdot \|B\|$.

С помощью понятия модуля вектора легко ввести в векторном пространстве понятия окрестности, внутренней и предельной точки множества, замкнутого и открытого множества. Эти обобщения делаются так же, как и соответствующие обобщения для комплексного пространства. Примеры открытых множеств:

I) ε - окрестность точки x_0 , т.е. множество точек x векторного пространства, для которых удовлетворяется неравенство ство $|x - x_0| < \varepsilon$, т.е. неравенство $\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_k - x_{0,k})^2} < \varepsilon$,

где x_k, $x_{0,k}$ – компоненты векторов x, x_0 ;

2) прямоугольная окрестность точки x_0 , т.е. множество точек x , для которых удовлетворяется неравенство

$$|x_k - x_{0,k}| < \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) .$$

Примеры замкнутых множеств:

I. Замкнутая ε – окрестность точки x_0 определяется неравенством $|x - x_0| \leq \varepsilon$.

2. Замкнутая прямоугольная окрестность точки x_0 определяется неравенством:

$$|x_k - x_{0,k}| \leq \varepsilon_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) .$$

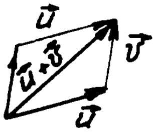
§ 9. Геометрическая интерпретация векторов

В физике вектором называется направленный отрезок. Обозначение вектора: $\vec{a}$.

Действия сложения векторов и умножения вектора на число определяется естественным образом.

Для построения суммы $\vec{u} + \vec{v}$ следует вектор $\vec{v}$ параллельно перенести так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{u}$.

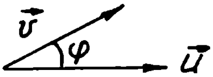
Тогда вектор, проведенный из начала вектора $\vec{u}$ к концу вектора $\vec{v}$ и есть вектор $\vec{u} + \vec{v}$. Легко видеть , что



$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

Произведение вектора $\vec{u}$ на число α есть вектор, направленный так же, как и вектор $\vec{u}$, но имеющий длину в $|\alpha|$ раз больше, чем длина вектора $\vec{u}$ при $\alpha>0$, если же $\alpha<0$, то направление вектора $\alpha\vec{u}$ противоположно направлению $\vec{u}$. Скалярное произведение векторов определяется следующим образом:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos\varphi$, где $|\vec{u}|$ – длина вектора $\vec{u}$, а φ – угол между векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$. Из определения скалярного произведения видно, что $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$.



Выражение $\vec{u}\cdot\vec{v}$ можно записать в другом виде:

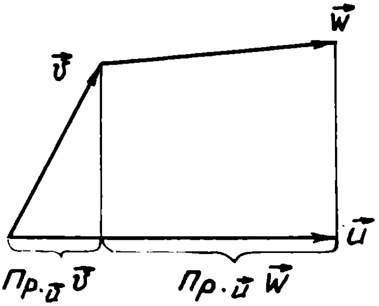
$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot Пр._{\vec{u}}\,\vec{v}=|\vec{v}|\cdot Пр._{\vec{v}}\,\vec{u},$$

где $Пр._{\vec{u}}\,\vec{v}$ означает длину проекции вектора $\vec{v}$ на направление вектора $\vec{u}$ (если направление проекции и направление вектора $\vec{u}$ совпадают, то длина вектора проекции берется со знаком $+$, в противном случае берется знак $-$).

Из такой записи скалярного произведения вытекает следующее свойство скалярного произведения: $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$

$\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\vec{w}$.

(см. рисунок).



Установим теперь соответствие между определением вектора в физике и определением, данным ранее. Выберем три перпендикулярных друг другу вектора единичной длины $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Тогда любой вектор $\vec{u}$ можно представить в виде суммы векторов, направленных по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}\ .$$

При этом

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1)\vec{i} + (u_2 + v_2)\vec{j} + (u_3 + v_3)\vec{k}\ ,$$

$$\alpha\vec{u} = \alpha u_1\vec{i} + \alpha u_2\vec{j} + \alpha u_3\vec{k}\ ,$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k})(v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) =$$

$$= u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3\ ,$$

так как $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1,\quad \vec{i}\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0.$

Таким образом, каждому вектору $\vec{u}$ можно поставить в соответствие тройку чисел $u = (u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3)$, т.е. вектор в рассмотренном ранее смысле. При этом $\vec{u} + \vec{v}$ соответствует $u + v$, $\alpha\vec{u}$ соответствует αu и $\vec{u}\cdot\vec{v}$ соответствует $u\cdot v$ с сохранением всех свойств этих действий. В данном случае мы имеем векторное пространство (действительное) трех измерений. При рассмотренном соответствии длине вектора $\vec{u}$ соответствует $|u|$.

Глава 2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ I. Определение числовых последовательностей и подпоследовательностей. Сходящиеся последовательности

Определение. Пусть каждому натуральному числу n $(n=1,2,\ldots)$ поставлено в соответствие некоторое вещественное число x_n. Тогда говорят, что нам задана некоторая числовая последовательность, которую будем обозначать через $\{x_n\}$. Число x_n будем называть членом последовательности с номером n.

Арифметические операции над числовыми последовательностями вводятся естественным образом.

Определение. Суммой, разностью, произведением, отношением последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ называются последовательности $\{z_n\}$, члены которых образованы соответственно по правилам: $z_n=x_n+y_n$, $z_n=x_n-y_n$, $z_n=x_n\cdot y_n$, $z_n=\dfrac{x_n}{y_n}$.

Можно рассмотреть понятие более общее, чем сумма и разность последовательностей - линейную комбинацию последовательностей. Так будем называть последовательность $\{z_n\}$, члены которой образованы по правилу $z_n=c_1x_n+c_2y_n$, где c_1, c_2 - заданные числа.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху (снизу), если числовое множество с элементами x_1, x_2, ... ограничено сверху (снизу). Последовательность, ограниченная сверху и снизу, называется ограниченной.

Отметим среди всех последовательностей особые классы - так называемые монотонные последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется монотонно невозрастающей (неубывающей), если при $m>n$ будет выполняться неравенство $x_m\le x_n$ $(x_m\ge x_n)$. Если при $m>n$ выполняется строгое неравенство $x_m<x_n$, $(x_m>x_n)$, то последовательность называется монотонно убывающей (возрастающей). Монотонно невозрастающие и монотонно неубывающие последовательности называются монотонными.

Рассмотрим понятие подпоследовательности.

Определение. Пусть задана последовательность $\{x_n\}$ и монотонно возрастающая последовательность целых положительных чисел $\{k_n\}$. Тогда последовательность $\{y_n\} = \{x_{k_n}\}$ называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

Среди всех последовательностей наиболее простыми свойствами обладают сходящиеся последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется сходящейся к некоторому числу x, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, зависящий от ε, что при всех $n \geq N$ имеет место неравенство $|x_n - x| < \varepsilon$. Число x называется пределом последовательности $\{x_n\}$.

Обозначение: $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ или $x_n \to x$, при $n \to \infty$. Несходящиеся последовательности называются расходящимися. Иногда удобно пользоваться понятием бесконечного предела.

Определение. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный плюс бесконечности $(+\infty)$, если при любом числе $C > 0$ найдется такой номер N, что при $n \geq N$ выполняется неравенство $x_n > C$. Обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$.

Аналогичный смысл имеет обозначение $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$.

.Пример. Покажем, что $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$. Действительно, положим $|q| = \frac{1}{1+\alpha}$, где $\alpha > 0$. Так как $|q^n| = \frac{1}{(1+\alpha)^n} < \frac{1}{1+n\alpha}$, то при любом $\varepsilon > 0$ имеем $|q^n| < \varepsilon$ при $n \geq N$, где номер N выбран из условия $\frac{1}{1+N\alpha} < \varepsilon$, т.е. $N > \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$. Если $q > 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = +\infty$, что доказывается с помощью аналогичных оценок: $q = 1+\alpha$, где $\alpha > 0$, $q^n = (1+\alpha)^n > 1 + n\alpha$.

Если из последовательности $\{x_n\}$ можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к некоторому числу a, то число a называется частичным пределом последовательности $\{x_n\}$. Наибольший (наименьший) из частичных пределов называется верхним (нижним) пределом последовательности и обозначается через $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ $(\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n)$.

Из определения предела мы видим, что для сходящихся последовательностей сколь бы малую окрестность точки x мы ни рассматривали, все члены последовательности, начиная с некоторого номера, лежат в этой окрестности, если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Рассмотрим условия существования частичных пределов.

Теорема. Вся ая ограниченная последовательность $\{x_n\}$ имеет хотя бы один частичный предел.

Доказательство. Множество чисел x_n при $n = 1, 2 \ldots$ составляет некоторое ограниченное числовое множество A (некоторые элементы этого множества могут соответствовать нескольким членам последовательности). Множество A может быть как конечным, так и бесконечным. В первом случае хотя бы один из элементов множества A, например $x = a$, соответствует бесконечному числу членов последовательности. Пусть ему соответствуют члены последовательности с номерами k_1, k_2, ..., k_n ..., где $k_1 < k_2 < \ldots < k_n - \ldots$.

Тогда подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ будет сходящейся, так как $x_{k_n} = a$ (очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a$). Если множество A бесконечно, то по теореме Больцано-Вейерштрасса это множество имеет хотя бы одну предельную точку. Пусть $x=a$ является одной из предельных точек. Положим $\varepsilon_n = \frac{1}{10^n}$ и выберем в ε_1 - окрестности точки a элемент множества A, соответствующий номеру k_1 в последовательности $\{x_n\}$, а в ε_2 - окрестности точки a элемент множества A, соответствующий номеру $k_2 > k_1$ в последовательности $\{x_n\}$. Продолжая этот процесс, мы получим подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, члены которой удовлетворяют неравенствам $|x_{k_n} - a| < \varepsilon_N$ при $n \geq N$. Легко видеть, что число a будет пределом этой подпоследовательности, так как при любом $\varepsilon > 0$ достаточно выбрать N из условия $\varepsilon_N < \varepsilon$, чтобы было справедливо неравенство: $|x_{k_n} - a| < \varepsilon$ при $n \geq N$. Теорема доказана.

Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, то говорят, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty .$$

Аналогичный смысл имеет равенство

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty .$$

В соответствии с этой договоренностью можно считать, что всякая последовательность имеет частичный предел (конечный или бесконечный).

Пример. Пусть

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a \qquad \left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = a\right).$$

Доказать, что при любом $\varepsilon > 0$ имеется лишь конечное число членов последовательности, превосходящих $a+\varepsilon$ (меньших $a-\varepsilon$).

Указание. Рассмотреть подпоследовательность с членами, превосходящими $a+\varepsilon$ (меньшими $a-\varepsilon$).

§ 2. Свойства сходящихся последовательностей

Сходящиеся последовательности обладают целым рядом замечательных свойств. Доказательство всех этих свойств будет опираться на следующие свойства модуля числа: I) $|x| < a$ означает, что $-a < x < a$;

2) $\left||x_1| - |x_2|\right| \leq |x_1 \pm x_2| \leq |x_1| + |x_2|$;

3) $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$, $\left|\dfrac{x_1}{x_2}\right| = \dfrac{|x_1|}{|x_2|}$.

Теорема. Сходящиеся последовательности обладают следующими свойствами:

1. Любая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к числу x , сходится к этому же числу.
2. Сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ может иметь лишь один предел.
3. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$. Тогда найдется такой номер N , что при $n \geq N$ все члены последовательности $\{x_n\}$ будут иметь тот же знак, что и число a .
4. Сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ ограничена.
5. Пусть существуют пределы последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, равные соответственно x и y . Тогда существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} (c_1 x_n + c_2 y_n) = c_1 x + c_2 y$ (c_1 , c_2 - заданные числа),

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = x \cdot y, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y} \quad (\text{при } y_n \neq 0 ,\ y \neq 0) .$$

6. Пусть $x_n \leq y_n$ при $n \geq N_0$ и существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y .$$

Тогда $x \le y$.

7. Пусть $x_n \le y_n \le z_n$ и существуют равные друг другу пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$.

Тогда существует предел последовательности $\{y_n\}$, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n .$$

Последние два свойства называют теоремами сравнения для последовательностей.

Доказательство: I) при любом $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что $|x_n - x| < \varepsilon$ при $n \ge N$. Рассмотрим подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$. Так как $k_n \ge n$, то $|x_{k_n} - x| < \varepsilon$ при $n \ge N$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = x$;

2) пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x'$,

причем $x' \ne x$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ найдутся такие номера N_1 и N_2 , что $|x_n - x| < \varepsilon$ при $n \ge N_1$ и $|x_n - x'| < \varepsilon$ при $n \ge N_2$. Если $n \ge N = \max\{N_1, N_2\}$, то оба эти неравенства выполняются одновременно. Поэтому при $n \ge N$ имеем $|x - x'| < |(x - x_n) + (x_n - x')| \le$

$$\le |x_n - x| + |x_n - x'| < 2\varepsilon .$$

Ввиду произвольности числа ε это возможно лишь при $x = x'$, что и требовалось доказать;

3) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \ne 0$.

Тогда при любом $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Положим $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$. Тогда при $n \geq N$ имеем:

$$x_n = a + (x_n - a) \quad ,$$

откуда $a - \frac{|a|}{2} < a - |x_n - a| < x_n \leq a + |x_n - a| < a + \frac{|a|}{2}$.

Правая и левая часть этого неравенства имеет тот же знак, что и число a. Поэтому при $n \geq N$ числа x_n имеют тот же знак, что и число a;

4) пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$.

Тогда при любом $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что $|x_n - x| < \varepsilon$ при $n \geq N$. Поэтому при $n \geq N$ имеем

$$|x_n| = |(x_n - x) + x| \leq |x_n - x| + |x| < \varepsilon + |x| ,$$

откуда при любых значениях n будет

$$|x_n| \leq c = max\{|x_1|, |x_2|, \ldots |x_{N-1}|, \varepsilon + |x|\} ;$$

5) при любых $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ найдутся такие номера N_1 и N_2, что $|x_n - x| < \varepsilon_1$ при $n \geq N_1$, $|y_n - y| < \varepsilon_2$ при $n \geq N_2$. Если $n \geq N \geq max\{N_1, N_2\}$, то эти неравенства выполняются одновременно. Отсюда при $n \geq N$ имеем:

$$|(c_1 x_n + c_2 y_n) - (c_1 x + c_2 y)| = |c_1(x_n - x) + c_2(y_n - y)| \leq$$

$$\leq |c_1| \cdot |x_n - x| + |c_2| \cdot |y_n - y| < |c_1| \varepsilon_1 + |c_2| \varepsilon_2 .$$

При любом $\varepsilon > 0$ подберем числа $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ из условия $|c_1| \varepsilon_1 + |c_2| \varepsilon_2 = \varepsilon$.

Тогда при $n \geq N$ имеем:

$$|(c_1 x_n + c_2 y_n) - (c_1 x + c_2 y)| < \varepsilon ,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} (c_1 x_n + c_2 y_n) = c_1 x + c_2 y$.

Аналогично при $n \geq N$ имеем:

$$|x_n \cdot y_n - xy| = |x_n(y_n - y) + (x_n - x)y| \leq |x_n| \cdot |y_n - y| + |x_n - x| \cdot |y| .$$

Так как последовательность $\{x_n\}$ сходится, то она ограничена, т.е. $|x_n| < C$, где C некоторое положительное число. Поэтому $|x_n y_n - xy| \leq C\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \cdot |y|$. Выбирая ε_1 и ε_2 из условия $C\varepsilon_2 + \varepsilon_1 |y| = \varepsilon$, получим $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$ при $n \geq N$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = xy$.

Докажем теперь, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$, если $y_n \neq 0$, $y \neq 0$. Имеем при $n \geq N$:

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| = \frac{|x_n y - x y_n|}{|y_n||y|} = \frac{|(x_n - x)y - (y_n - y)x|}{|y_n| \cdot |y|} \leq \frac{|x_n - x|}{|y_n|} + \frac{|y_n - y| \cdot |x|}{|y_n| \cdot |y|} .$$

Оценим $|y_n|$ снизу:

$$|y_n| = |(y_n - y) + y| \geq |y| - |y_n - y| > |y| - \varepsilon_2 .$$

Пусть число ε_2 удовлетворяет условию $\varepsilon_2 \leq \dfrac{|y|}{2}$. Тогда при $n \geq N$ будет $|y_n| > \dfrac{|y|}{2}$. Отсюда

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| < \frac{2\varepsilon_1}{|y|} + \frac{2\varepsilon_2 |x|}{|y|^2} .$$

При любом $\varepsilon > 0$ выберем числа $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ из условия:

$$\frac{2\varepsilon_1}{|y|} + \frac{2\varepsilon_2 |x|}{|y|^2} = \varepsilon .$$

Тогда $\left|\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{x}{y}\right| < \varepsilon$ при $n \geq N$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$;

6) Предположим, что $x > y$. При любых $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ найдется такой номер $N \geq N_0$, что $|x_n - x| < \varepsilon_1$, $|y_n - y| < \varepsilon_2$ при $n \geq N$ (см. пункт 5). Оценим разность $x_n - y_n$ при $n \geq N$: $x_n - y_n = (x_n - x) - (y_n - y) + x - y > x - y - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Если выбрать $\varepsilon_1 > 0$ и $\varepsilon_2 > 0$ из условия $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < x - y$, то при $n \geq N$ будет $x_n > y_n$, что противоречит условию;

7) при любом $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что

$|x_n - x| < \varepsilon$, $|z_n - x| < \varepsilon$ при $n \geq N$,

где $x = \lim x_n$.

Но $x_n - x \leq y_n - x \leq z_n - x$.

Отсюда

$$-\varepsilon \leq y_n - x \leq \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geq N,$$

т.е.

$$\lim_{n\to\infty} y_n = x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n .$$

Теорема полностью доказана.

Следствие свойства 6. Пусть при $n \geq N_0$ выполняется неравенство $x_n \leq a$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда $x \leq a$.

Для доказательства, в свойстве 6 достаточно положить $y_n = a$.

Заметим, что в формулировке свойства 6 неравенство $x_n \leq y_n$ можно заменить на неравенство $x_n < y_n$, так как из неравенства $x_n < y_n$ вытекает выполнение неравенства $x_n \leq y_n$. Аналогичное замечание относится и к следствию свойства 6.

Мы можем проверить, является ли последовательность сходящейся, если нам известен предел этой последовательности. Рассмотрим признак сходимости последовательности, не опирающийся на знание предела этой последовательности. Этот признак называется критерием Коши.

Теорема (критерий Коши). Для того, чтобы последовательность $\{x_n\}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, что при $n \geq N$, $m \geq N$ выполняется неравенство $|x_n - x_m| < \varepsilon$.

Доказательство. Докажем необходимость критерия Коши для сходящихся последовательностей. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому числу x. Тогда при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такой номер N, что $|x_n - x| < \varepsilon_1$, если $n \geq N$. Но в таком случае при $n \geq N$ и $m \geq N$ имеем:

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x) + (x - x_m)| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < 2\varepsilon_1 .$$

При произвольном $\varepsilon > 0$ положим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда при $n \geq N$, $m \geq N$ имеем $|x_n - x_m| < \varepsilon$, т.е. выполняются условия критерия Коши.

Докажем достаточность критерия Коши. Пусть при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такой номер N, что $|x_n - x_m| < \varepsilon_1$, если $n \geq N$, $m \geq N$. В таком случае при фиксированном значении $m \geq N$ имеем:

$$|x_n| = |(x_n - x_m) + x_m| \leq |x_n - x_m| + |x_m| < \varepsilon_1 + |x_m| ,$$

если $n \geq N$. Это означает, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена и имеет поэтому хотя бы один частичный предел x. Покажем, что этот предел является пределом всей последовательности $\{x_n\}$. По определению числа x при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такой номер $N_0 \geq N$, что $|x_{N_0} - x| < \varepsilon_1$. Но в таком случае при $n \geq N_0 \geq N$ имеем:

$$|x_n - x| = |(x_n - x_{N_0}) + (x_{N_0} - x)| \leq |x_n - x_{N_0}| + |x_{N_0} - x| < 2\varepsilon_1 .$$

Если при любом $\varepsilon > 0$ положить $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, то $|x_n - x| < \varepsilon$ при $n \geq N_0$, т.е. последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу x.

Теорема доказана.

Последовательность, для которой выполнены условия критерия Коши, называется фундаментальной.

Мы рассмотрели общий признак сходимости последовательности. Для монотонных последовательностей можно указать более простой признак сходимости.

Теорема. Ограниченная сверху (снизу) неубывающая (невозрастающая) последовательность сходится.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ является неубывающей и ограничена сверху. Тогда множество чисел x_n при $n = 1, 2, \ldots$ ограничено сверху и имеет поэтому точную верхнюю грань x. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу x. При любом $\varepsilon > 0$ в множестве чисел x_n найдется хотя бы одно число x_N, превосходящее $x - \varepsilon$. Но в таком случае при $n \geq N$ имеем:

$$x - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq x,$$

т.е. $-\varepsilon < x_n - x \leq 0$, откуда

$$|x_n - x| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. Для невозрастающей ограниченной снизу последовательности теорема доказывается аналогично.

Примеры. I. Докажем существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (n = 1, 2 \ldots).$$

Так как $x_n > 1$, то последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу. С другой стороны,

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n^4}\right)^n < 1,$$

т.е. $x_n < x_{n-1}$.

Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ является невозрастающей и ограниченной снизу и, следовательно, сходится к некоторому числу, которое обозначается через e . Приближенное значение e = 2,71828.

Далее,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e.$$

2. Доказать, что при $a>0$

$$\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1.$$

Указание. При $a>1$ положить $a^{\frac{1}{n}}=1+\alpha$. Тогда $(1+\alpha)^n=a$ и для величины α можно воспользоваться полученной ранее оценкой $0<\alpha<\frac{a-1}{n}$. Если $a<1$, то воспользоваться равенством $a^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}$.

3. Пусть $x_n=a^{\frac{1}{n}}\sin\frac{\pi n}{3}$ $(a>0,\ n=1,2,\ldots)$.

Найти точную верхнюю и нижнюю грань числового множества A с элементами x_n ; найти частичные пределы последовательности $\{x_n\}$.

Указание. Выделить из последовательности $\{x_n\}$ монотонные подпоследовательности, полагая $n=6k+p$

при $p=0,1,2,3,4,5$; $k=1,2,3,\ldots$.

Тогда по доказанной выше теореме для числового множества A , элементами которого являются члены монотонной последовательности

$\{x_n\}$, $\inf A$ и $\sup A$, находятся среди чисел x_1 и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

§ 3. Числовые ряды

Наряду с последовательностями в различных вопросах математики широко применяются также так называемые ряды, являющиеся обобщением сумм вещественных чисел :

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$$

на случай бесконечного числа слагаемых. Обозначение ряда:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x_k .$$

Определение. Частичной суммой с номером n ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ называется сумма $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$.

Определение. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ называется сходящимся, если последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм сходится. Предел S последовательности частичных сумм называется суммой ряда. Обозначение:

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} x_k .$$

Мы связали понятие сходимости ряда со сходимостью последовательности частичных сумм. Можно установить и обратное соответствие: последовательность $\{x_n\}$ будет сходиться или расходиться, если сходится или расходится ряд $x_1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x_{k+1} - x_k)$.

Действительно, это вытекает из явного вида для частичных сумм ряда:

$$S_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_{n+1} - x_n) = x_{n+1} .$$

С помощью рассмотренных ранее признаков сходимости последовательностей можно установить целый ряд признаков сходимости числовых рядов.

Критерий Коши. Для того, чтобы ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N, что при $n \geq m \geq N$ выполняется неравенство $\left|\sum\limits_{k=m}^{n} x_k\right| < \varepsilon$. Для доказательства достаточно воспользоваться критерием Коши сходимости последовательности частичных сумм $\{S_n\}$ и равенством

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = S_n - S_{m-1} .$$

Из критерия Коши при $m = n$ получаем очень простой необходимый признак сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$: если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Рассмотрим теперь простые достаточные условия, обеспечивающие сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$. Из неравенства

$$\left|\sum_{k=m}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=m}^{n} |x_k| \qquad \text{при } n \geq m$$

следует, что из сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_k|$ вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$. Если сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_k|$, то говорят, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ абсолютно сходится. Если же ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ сходится, а ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_k|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ называют условно сходящимся.

Теорема. Имеют место следующие признаки сходимости и расходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$:

I. Пусть $\sum\limits_{k=0}^{n} |x_k| \leq C$, где C - некоторая постоянная, тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ абсолютно сходится.

2. Признак сравнения. Если $|x_k| \leq y_k$ при $k \geq N_0$ и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ абсолютно сходится; если же $x_k \geq |y_k|$ при $k \geq N_0$ и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ расходится, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ также расходится.

3. Признак Коши. Пусть $\alpha = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|x_k|}$.

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ абсолютно сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha > 1$.

4. Признак Даламбера. Пусть $\beta = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \left| \dfrac{x_{k+1}}{x_k} \right|$.

Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ абсолютно сходится при $\beta < 1$.

Если же при $k \geq N_0$ имеет место неравенство $\left| \dfrac{x_{k+1}}{x_k} \right| \geq 1$, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ расходится.

Доказательство. I) пусть $\sum\limits_{k=0}^{n} |x_k| \leq C$ при любых значениях n . Суммы $\bar{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |x_k|$ образуют неубывающую последовательность, ограниченную сверху. Следовательно, эта последовательность сходится, т.е. ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ абсолютно сходится;

2) Пусть $|x_k| \le y_k$ при $k \ge N_0$ и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ сходится. Так как для ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ выполнены условия критерия Коши, то они выполнены и для ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_k|$, в силу неравенств :

$$\sum_{k=m}^{n} |x_k| \le \sum_{k=m}^{n} y_k$$

при $n \ge m$. Вторая часть утверждения доказывается методом доказательства от противного;

3) для доказательства воспользуемся признаком сравнения. В качестве ряда, с которым будем сравнивать исходный ряд, возьмем бесконечную геометрическую прогрессию $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$, где $y_k = aq^k$ ($a > 0$). Покажем, что этот ряд сходится при $0 \le q < 1$ и расходится при $q > 1$. Имеем $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} aq^k = a\,\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Из этого выражения видно, что последовательность частичных сумм S_n сходится при $0 \le q < 1$ к числу $\dfrac{a}{1-q}$. Если же $q > 1$, то $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \lim\limits_{k\to\infty} aq^k = +\infty$ и не выполняется необходимый признак сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = 0$.

Предположим теперь, что члены ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ удовлетворяют условию $\alpha = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|x_k|} < 1$. Тогда из определения верхнего предела при любом $\varepsilon > 0$ вытекает, что найдется такой номер N, что $\sqrt[k]{|x_k|} < \alpha + \varepsilon$ при $k \ge N$ (лишь для конечного числа номеров выполняется неравенство $\sqrt[k]{|x_k|} \ge \alpha + \varepsilon$, см. пример в § 1). Так как $\alpha < 1$, то можно ε выбрать настолько малым, что будет иметь место неравенство $\alpha + \varepsilon = q < 1$. В этом случае при $k \ge N$ имеем $\sqrt[k]{|x_k|} < q$, т.е. $|x_k| < y_k$, где $y_k = q^k$. Так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ сходится, то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ по признаку сравнения сходится абсолютно. Пусть теперь $\alpha > 1$. Согласно определению верхнего предела, при любом $\varepsilon > 0$ бесконечное число членов последовательности $\left\{ \sqrt[k]{|x_k|} \right\}$ удовлетворяет неравенству $\alpha - \varepsilon \le \sqrt[k]{|x_k|} \le \alpha$, т.е. $(\alpha - \varepsilon)^k \le |x_k| \le \alpha^k$. Выберем число $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы имело место неравенство $\alpha - \varepsilon = q > 1$. Тогда бесконечное число членов последовательности $\{x_k\}$ удовлетворяет неравенству $|x_k| \ge q^k > 1$ и не может быть выполнен необходимый признак сходимости рядов: $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = 0$. Поэтому ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ расходится;

4) Пусть $\beta = \overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| < 1$. Из определения верхнего предела вытекает, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что $\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| < \beta + \varepsilon$ при $k \ge N$.

Выберем ε настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\beta + \varepsilon = q < 1$. Тогда $\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| < q$ при $k \ge N$, т.е.

$$|x_{N+1}| < |x_N| q, \quad |x_{N+2}| < |x_{N+1}| q < (x_N) q^2 \ . \ . \ .$$

$$|x_k| \le |x_N| q^{k-N} .$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_N| q^{k-N}$ сходится, то по признаку сравнения ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ также сходится. Пусть теперь $\left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \ge 1$ при $k \ge N_0$. Тогда при $k \ge N_0$ члены последовательности $\{|x_k|\}$ не убывают и не выполняется необходимый признак сходимости рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ расходится.

Рассмотрим теперь достаточный признак сходимости рядов, применимый и для условно сходящихся рядов;

5) признак Лейбница. Рассмотрим ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ со знакочередующимися членами, т.е. $x_k = (-1)^k a_k$, где $a_k \geq 0$. Если при $k \geq N_0$ последовательность $\{a_k\}$ монотонно не возрастает и $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ сходится.

Доказательство. При $2n \geq 2N_0$ имеем:

$$S_{2n+1} - S_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0,$$
$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0,$$
$$S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \leq 0.$$

Так как $S_{2n+1} \geq S_{2n-1}$ и $S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_{2n-2} \leq \ldots \leq S_{2N_0}$, то последовательность нечетных сумм $\{S_{2n+1}\}$ является монотонно неубывающей и ограниченной сверху, т.е. существует предел $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S = \sup_n S_{2n+1}$.

Аналогично из неравенств $S_{2n+2} \leq S_{2n}$, $S_{2n} \geq S_{2n+1} \geq S_{2N_0+1}$ вытекает, что последовательность $\{S_{2n}\}$ монотонно не возрастает и ограничена снизу, т.е. существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \bar{S} = \inf S_{2n}.$$

Переходя в равенстве $S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1}$ к пределу, получим $S = \bar{S}$, т.е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Так как

$$S = \inf_n S_{2n} = \sup_n S_{2n+1}, \quad \text{то} \quad S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n},$$

т.е. частичные суммы S_{2n} и S_{2n+1} дают нам предел S с точностью до величины $S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1}$.

Примеры. 1. Доказать, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ абсолютно сходится, если абсолютно сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ $(b_k \neq 0)$ и существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$.

Указание. Воспользоваться ограниченностью последовательности $\left\{ \frac{a_k}{b_k} \right\}$.

2, Пусть $a_{k,p} = \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+p)}$. Доказать сходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_{k,p}$ при $p > 1$, используя соотношение

$$a_{k,p}(1-p) = a_{k+1,p-1} - a_{k,p-1} .$$

3, Используя результаты примеров 1,2, доказать сходимость рядов вида $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{P_m(k)}{Q_n(k)}$, где $P_m(k)$, $Q_n(k)$ – полиномы степени m и n , соответственно, $Q_n(k) \neq 0$ при $k = 0,1,2 \dots$ и $n - m > 1$.

4. Пусть $a_k - b_k = c_k$ и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ сходится. Доказать, что сходимость или расходимость ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ вытекает из сходимости или расходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$.

§ 4. Операции над рядами

Рассмотрим теперь некоторые свойства рядов, аналогичные свойствам конечных сумм.

Теорема Коши о перестановке членов сходящегося ряда

Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ сходится абсолютно, то и любой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x'_k$, полученный перестановкой его членов, также сходится абсолютно и имеет ту же самую сумму.

Доказательство. Пусть S_n и S_n' – частичные суммы рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k'$. Так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ сходится абсолютно, то при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такой номер N_0, что $\sum\limits_{k=m+1}^{p} |x_k| < \varepsilon_1$, при $p > m \geq N_0$.

Отсюда:

$$|S_p - S_m| = \left|\sum_{k=m+1}^{p} x_k\right| \leq \sum_{k=m+1}^{p} |x_k| < \varepsilon_1$$

при $p > m \geq N_0$ и, следовательно, $|S - S_m| \leq \varepsilon_1$ при $m \geq N_0$, где S – сумма ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$.

Но все члены суммы S_m входят в некоторую сумму S_N'. Поэтому сумма S_n' при $n \geq N = N(\varepsilon_1)$ содержит все члены суммы S_m и еще несколько членов ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ с номерами, превышающими m. Пусть наибольший из таких номеров будет p. Тогда $|S_n' - S_m| \leq \sum\limits_{k=m+1}^{p} |x_k| < \varepsilon_1$

при $n \geq N(\varepsilon_1)$, откуда

$$|S_n' - S| = |(S_n' - S_m) + (S_m - S)| \leq$$

$$\leq |S_n' - S_m| + |S_m - S| < 2\varepsilon_1 .$$

При произвольном $\varepsilon > 0$ положим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда $|S_n' - S| < \varepsilon$ при $n \geq N$. Таким образом, мы доказали, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k'$ сходится и сумма его равна S.

Рассматривая подобным же образом ряды $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_k|$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |x_k'|$, мы убедимся в том, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k'$ сходится абсолютно. Теорема доказана.

Покажем, что в условно сходящемся ряде перемена мест слагаемых может привести к другой сумме.

Пример. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1}$. По признаку Лейбница этот ряд сходится. Поменяем порядок суммирования в ряде, объединив его члены в группы, содержащие одно положительное и два отрицательных слагаемых:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\dots .$$

Для этого ряда

$$S_{3n-1}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{4k+2}-\frac{1}{4k+4}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k\frac{1}{k+1} .$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}S_{3n-1}=\frac{1}{2}S \quad , \qquad \text{где} \quad S=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1} .$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}(S_{3n+1}-S_{3n})=\lim_{n\to\infty}(S_{3n}-S_{3n-1})=0 ,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{3n-1}=\frac{1}{2}S.$$

Таким образом, мы получили в результате перестановки слагаемых ряд, сумма которого вдвое меньше суммы исходного ряда. По только что доказанной теореме исходный ряд не может сходиться абсолютно, т.е. ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left|(-1)^k\frac{1}{k+1}\right| = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}$$

расходится.

Этот ряд называют гармоническим рядом.

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема Римана. Если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ сходится условно и S - произвольное число, то можно так переставить члены ряда, что полученный ряд будет сходиться к S.

Рассмотрим вопрос о возможности почленного сложения и перемножения сходящихся рядов.

Теорема. Если два ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ сходятся и имеют суммы, равные, соответственно, x и y, то и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (C_1 x_k + C_2 y_k)$ сходится и имеет сумму, равную $C_1 x + C_2 y$ (C_1, C_2 - произвольные постоянные).

Утверждение теоремы вытекает из соответствующего свойства частичных сумм $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$, $\bar{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} y_k$ и равенства

$$\lim_{n\to\infty}(C_1 S_n + C_2 \bar{S}_n) = C_1 \lim_{n\to\infty} S_n + C_2 \lim_{n\to\infty} \bar{S}_n .$$

Теорема. Если два ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ абсолютно сходятся и имеют суммы, равные x и y, то ряд, составленный из произведений $x_k \cdot y_\ell$ (k = 0,1,2,...; ℓ = 0,1,2 ...), занумерованных в любом порядке, также абсолютно сходится и его сумма равна $x \cdot y$.

Доказательство. Обозначим z_0, z_1, z_2 ... произведения вида $x_k \cdot y_\ell$, занумерованных в каком угодно порядке (k = 0, 1, 2 ..., ℓ = 0, 1, 2 ...). Рассмотрим частичную сумму S_n ряда $\sum_{i=0}^{\infty} |z_i|$. Сумма S_n состоит из членов вида $|x_k y_\ell|$. Пусть наибольший из номеров k и ℓ членов, входящих в эту сумму будет m. Тогда

$$S_n \le \sum_{0\le k,\ell\le m} |x_k y_\ell| = \sum_{k=0}^{m} |x_k| \sum_{\ell=0}^{m} |y_\ell| \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{\infty} |x_k| \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} |y_\ell| < \infty \quad .$$

Таким образом, по признаку сходимости рядов, ряд $\sum_{i=0}^{\infty} z_i$ сходится абсолютно. Но в таком случае сумма ряда $\sum_{i=0}^{\infty} z_i$ не зависит от порядка перебора членов. Будем перебирать произведения $x_k y_\ell$ при фиксированном значении m в следующем порядке:

$$x_0 y_m,\ x_m y_0,\ x_1 y_m,\ x_m y_1,\ x_2 y_m,\ x_m y_2, \dots, x_{m-1} y_m,\ x_m y_{m-1},\ x_m y_m .$$

Последовательно увеличивая m на единицу, мы переберем все произведения вида $x_k y_\ell$. Для вычисления суммы получившегося ряда вычислим частичную сумму, соответствующую значениям k и ℓ не превышающих N :

$$\sigma_N = \sum_{k=0}^{N} \sum_{\ell=0}^{N} x_k y_\ell = \sum_{k=0}^{N} x_k \sum_{\ell=0}^{N} y_\ell .$$

Сумма ряда $\sum_{i=0}^{\infty} z_i$ равна пределу сумм σ_N при $N \to \infty$, откуда $\sum_{i=0}^{\infty} z_i = x \cdot y$. Теорема доказана.

§ 5. Комплекснозначные и векторные последовательности и ряды

Понятие последовательности комплексных чисел или векторов вводится точно так же, как и понятие числовой последовательности или числового ряда.

С помощью понятия модуля комплексного числа или вектора вводятся понятия сходящихся комплекснозначных или векторных последовательностей и рядов таким же образом, как для числовых последовательностей и рядов, причем без изменения доказывается справедливость ранее рассмотренных свойств последовательностей и рядов , за исключением свойств, в которых используется операция сравнения (эта операция для комплексных чисел и векторов не была определена). Кроме того, для векторных последовательностей и рядов следует исключить из рассмотрения свойства, связанные с действиями умножения или деления членов последовательностей или рядов, так как соответствующие операции для векторов не были введены.

Отметим связь сходимости последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n$ со сходимостью числовых последовательностей

$$\{x_n\} \quad и \quad \{y_n\} .$$

__Теорема.__ Для сходимости последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы сходились последовательности $\{x_n\}=\{Re\ z_n\}$ и $\{y_n\}=\{Jm\ z_n\}$.

__Доказательство.__ I. Необходимость. Пусть последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ сходится к комплексному числу $c=a+ib$. Тогда при любом $\varepsilon>0$ найдется такой номер $N=N(\varepsilon)$, что $|z_n-c|<\varepsilon$ при $n\geq N$.
Так как $|x_n-a|\leq|z_n-c|$, $|y_n-b|\leq|z_n-c|$, то при $n\geq N$ имеем $|x_n-a|<\varepsilon$, $|y_n-b|<\varepsilon$, т.е. последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к a и b, соответственно.

2. Достаточность. Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся, соответственно, к a и b. Тогда при любых $\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$ найдутся такие номера $N_1=N_1(\varepsilon_1)$ и $N_2=N_2(\varepsilon_2)$, что $|x_n-a|<\varepsilon_1$ при $n\geq N_1(\varepsilon_1)$, $|y_n-b|<\varepsilon_2$, при $n\geq N_2(\varepsilon_2)$. Выберем при любом $\varepsilon>0$ числа ε_1 и ε_2 из условия $\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2=\varepsilon$ и положим $c=a+ib$, $N=max(N_1,N_2)$.
Тогда при $n\geq N$ будут иметь место неравенства

$$|z_n-c|=\sqrt{|x_n-a|^2+|y_n-b|^2}<\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2}=\varepsilon,$$

т.е. последовательность комплексных чисел $\{z_n\}$ сходится к комплексному числу $c=a+ib$. Теорема доказана.

С помощью того же метода, которым доказана теорема, из критерия Коши для сходимости последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, можно получить критерий Коши для сходимости последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ $(z_n=x_n+iy_n)$.

Так как понятие сходящегося ряда вводится с помощью понятия сходящихся последовательностей, то для рядов из комплексных чисел

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k \qquad (z_k = x_k + iy_k)$$

понятие сходимости можно ввести так же, как и для числового ряда. При этом остается справедливым критерий Коши и вытекающий из него признак сравнения: если при $k \geq N_0$ выполняются неравенства $|a_k| \leq b_k$ и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ сходится, то сходится также ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, в частности, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится, если сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$. Остаются также справедливыми вытекающие из признака сравнения все рассмотренные ранее признаки абсолютной сходимости рядов. В частности, степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (c_k = a_k + ib_k, \ z = x + iy)$ сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$,

где

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \sqrt[k]{|c_k|}} .$$

Так же, как и для числовой последовательности, последовательность комплексных чисел $\{c_n\}$ сходится или расходится одновременно с рядом $c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} [c_{k+1} - c_k]$.

Покажем теперь, что для множеств комплексных чисел справедлива теорема Больцано-Вейерштрасса.

Теорема. Всякое бесконечное ограниченное множество A комплексных чисел имеет хотя бы одну предельную точку.

Доказательство. Для любого элемента $z = x + iy$ множества A выполняется неравенство $|z| \leq C$, где C – некоторая постоянная. Но в таком случае $|x| \leq C$,

$|y| \leq c$, т.е. множества действительных и мнимых частей комплексных чисел z ограничены. Хотя бы одно из этих множеств является бесконечным. Предположим для определенности, что это будет множество действительных частей z. Тогда множество чисел x является бесконечным и ограниченным и поэтому содержит хотя бы одну предельную точку, которую назовем a. Это означает, что из множества чисел x можно выделить сходящуюся к a последовательность не равных друг другу чисел x_n. Но каждому числу x_n соответствует во множестве A хотя бы одно число $z_n = x_n + iy_n$, действительной частью которого оно является. Последовательность $\{y_n\}$ ограничена $(|y_n| \leq c)$ и по теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся к некоторому числу b последовательность $\{y_{k_n}\}$. Но в таком случае у последовательности $\{z_{k_n}\}$ отличных друг от друга чисел последовательности действительных и мнимых частей этих чисел сходятся к числам a и b. Поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} z_{k_n} = c = a + ib$.

Комплексное число c является предельной точкой множества A, так как в любой ε - окрестности точки можно найти точки вида $z_{k_n} \neq c$, принадлежащие рассматриваемому множеству. Теорема доказана.

Для векторных последовательностей и рядов имеют место теоремы, аналогичные теоремам для комплекснозначных последовательностей и рядов.

Теорема. Для сходимости последовательности $\{x_n\}$ векторов $x_n = (x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_m})$ необходимо и достаточно, чтобы сходились последовательности $\{x_{nk}\}$ компонент этих векторов $(k = 1, 2, \dots, m)$.

Теорема Больцано - Вейерштрасса

Всякое ограниченное бесконечное множество A векторного пространства имеет хотя бы одну предельную точку.

Доказываются эти теоремы так же, как и ранее, только вместо перебора действительных и мнимых частей комплексных чисел следует перебирать компоненты векторов. При этом используются неравенства $|u_k| \le |u|$ для векторов $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, аналогичные соответствующим неравенствам для комплексных чисел.

Для векторных последовательностей и рядов остается справедливым критерий Коши и все признаки абсолютной сходимости рядов. С помощью критерия Коши так же, как и ранее доказывается сходимость векторного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ в случае, если $|u_k| \le v_k$ при $k \ge N_0$ и числовой ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k$ сходится. Отметим также признак сходимости последовательности $\{u_n\}$ векторов: последовательность $\{u_n\}$ сходится или расходится, если сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} [u_{n+1} - u_n] .$$

В частности, последовательность векторов $\{u_n\}$ будет сходящейся, если сходится числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_{n+1} - u_n| .$$

Глава 3. ПРЕДЕЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ I. Способы задания функции

Пусть задано правило f, по которому устанавливается соответствие каждого числа x из некоторого числового множества A числу y. Тогда говорят, что задана функция $y=f(x)$. Можно рассматривать также функцию многих переменных $y=f(x_1, x_2, \dots, x_m)$, когда совокупности чисел $x_1, x_2, \dots, x_m$ ставится в соответствие числа $y=f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Совокупность чисел $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$ удобно рассматривать как точку m-мерного векторного пространства. Сокращенная запись $y=f(x)$, где $x=(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Укажем другие часто используемые обозначения: для функции двух переменных $z=f(x,y)$, для функции трех переменных $u=f(x,y,z)$. В трехмерном пространстве вектор $\vec{r}$ с компонентами x, y, z часто называют радиус-вектором и для функции трех переменных используют обозначение $f(\vec{r})$.

Множество A точек x, для которых задана функция $f(x)$ будем называть областью определения функции $y=f(x)$, а множество B значений y будем называть областью значений функции $y=f(x)$. Множество B всех значений y при таком соответствии между числами x и y называется областью значений функции $f(x)$, а множество A называется областью определения функции. Переменную величину x, числовую или векторную, будем называть независимой переменной или аргументом, а переменную величину y — зависимой переменной. Будем называть функцию $y=f(x)$ с областью определения A и областью значений B ограниченной сверху (снизу), если множество B ограничено сверху(снизу), т.е. существует такое число C, что $f(x) \leq C$ при $x \in A$ ($f(x) \geq C$ при $x \in A$). Аналогично определяются понятия ограниченной функции и обозначения $\sup\limits_{x \in A} f(x) = \sup B$.

Рассмотрим различные способы задания функции одной переменной.

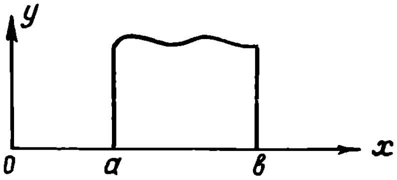
I. Аналитический способ задания функции

Указывается формула, по которой можно вычислить $f(x)$ для любого $x \in A$.

Пример: $y = x^2$, A – бесконечный интервал $-\infty < x < +\infty$.

2. Графический способ задания функции

Рассматривается декартова система координат на плоскости (x, y). Возможные значения (x, y) для заданной функции изображаются в виде графика этой функции (см.рисунок – функция задана на a, b),).



3. Табличный способ задания функции

Задаются значения y для ряда значений x в виде таблицы и указывается способ вычисления y для промежуточных значений x по табличным значениям.

4. Неявный способ задания функции. Функция $y = f(x)$ задается с помощью соотношения (или ряда соотношений) между значениями x и y.

Пример. Соотношению $x^2 - y^2 = 0$ удовлетворяют две функции $y = x$ и $y = -x$. В таких случаях иногда говорят, что соотношение между величинами x и y определяет многозначную функцию. Как правило, мы будем изучать лишь однозначные функции.

Простейший способ задания функции – задание функции $y = f(x)$ с помощью соотношения $x = \varphi(y)$. Функция $f(x)$ в этом случае называется обратной по отношению к функции $\varphi(y)$. При указанном способе задания функции $y = f(x)$ мы имеем возможность вычислять по значениям зависимой переменной y значения независимой переменной (аргумента) x. Другой часто используемый неявный способ задания функции – задание функции $y = f(x)$ с помощью двух функций $y = \varphi(t)$, $x = \psi(t)$. Переменная t в этом случае называется параметром.

§ 2. Предел функции

Рассмотрим понятие предельного значения функции $y=f(x)$ при $x\to a$. Будем считать, что функция $y=f(x)$ задана на множестве A, для которого точка $x=a$ является предельной (для функции одной переменной A -числовое множество, для функции нескольких переменных -векторное). Дадим два определения предела функции.

Определение I. Число b будем называть пределом функции $y=f(x)$ при $x\to a$, если для любой последовательности точек $\{x_n\}\in A$ $(x_n\neq a)$, сходящейся к a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к b

Обозначение:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b.$$

Определение 2. Число b называется пределом функции $y=f(x)$ при $x\to a$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, зависящее от ε $(\delta=\delta(\varepsilon))$, что для всех $x\in A$, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполнено неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$ (Обозначение "при $x\to a$" читается "при x, стремящемся к a".)

Покажем, что оба определения предела функции эквивалентны.

Теорема. Определения I и 2 предела функции эквивалентны.

Доказательство. Докажем сначала, что из определения 2 вытекает определение I. Пусть b - предел функции $f(x)$ при $x\to a$ в смысле определения 2 и пусть $\{x_n\}$ - любая последовательность, сходящаяся к a ($x_n\neq a$). Тогда при любом $\delta>0$ найдется такой номер N, что $|x_n-a|<\delta$ при $n\geq N$. Кроме того, при любом $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что $|f(x)-b|<\varepsilon$ при $0<|x-a|<\delta$. Положим $\delta=\delta(\varepsilon)$ в неравенстве $|x_n-a|<\delta$. Тогда при $n\geq N=N(\varepsilon)$ получим $|f(x_n)-b|<\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=b$.

Покажем теперь, что из определения I вытекает определение 2. Предположим противное, т.е. число b является пределом функции $f(x)$ при $x\to a$ в смысле определения I, но не является пределом функции $f(x)$ при $x\to a$, в смысле определения 2. Это означает, что для некоторого $\varepsilon>0$ не найдется ни одного числа $\delta>0$, чтобы выполнялось неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$ при $0<|x-a|<\delta$, $x\in A$. Но тогда для этого значения ε и любого $\delta>0$ найдутся такие точки $x\in A$, что $0<|x-a|<\delta$, но $|f(x)-b|\geq\varepsilon$. Положим $\delta=\delta_n$, где $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$. Для каждого значения δ_n найдем такое значение $x=x_n$, что $0<|x_n-a|<\delta_n$ но $|f(x_n)-b|\geq\varepsilon$.

Последовательность $\{x_n\}$ сходится к a. Действительно, при любом $\delta>0$ можно найти такой номер N, что при $n\geq N$ будет выполнено неравенство $\delta_n<\delta$, откуда при $n\geq N$ имеем

$$|x_n-a|<\delta_n<\delta \quad \text{, т.е. } \lim_{n\to\infty}x_n=a.$$

В то же время последовательность $\{f(x_n)\}$ не может сходиться к b в силу неравенства $|f(x_n)-b|\geq\varepsilon$. Мы получили противоречие, так как считали, что число b является пределом функции $f(x)$ в смысле определения I. Теорема доказана.

Сформулируем критерий Коши существования предела функции, аналогичный критерию Коши существования предела последовательности.

Теорема (критерий Коши). Для того, чтобы существовал предел функции $f(x)$ при $x\to a$ необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon>0$ существовало такое число $\delta>0$, что $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$, если $0<|x-a|<\delta$, $0<|x'-a|<\delta$.

Доказательство. I. Необходимость. Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$. Тогда для любого $\varepsilon_1>0$ найдется такое число $\delta>0$, что $|f(x)-b|<\varepsilon_1$, $|f(x')-b|<\varepsilon_1$, если $0<|x-a|<\delta$,

$0 < |x'-a| < \delta$.

Но в таком случае $|f(x)-f(x')| = |[f(x)-b]-$

$$-[f(x')-b]| \le |f(x)-b|+|f(x')-b| < 2\varepsilon_1 .$$

Если при любом $\varepsilon > 0$ положим $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}$, то при $0 < |x-a| < \delta$, $0 < |x'-b| < \delta$ получим $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

2. Докажем теперь достаточность условий критерия Коши для существования предела функции. Пусть при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|f(x)-f(x')| < \varepsilon$ при $0 < |x-a| < \delta, 0 < |x'-a| < \delta$, $x \in A$, $x' \in A$. Рассмотрим любую последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к a ($x_n \neq a$). В силу сходимости последовательности $\{x_n\}$ при любом $\delta > 0$ найдется такой номер N , что $|x_n - a| < \delta$, $|x_m - a| < \delta$ при $n \geqslant N, m \geqslant N$ Положим $\delta = \delta(\varepsilon)$, $x = x_n$, $x' = x_m$. Тогда приходим к неравенству $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ при $n \geq N$, $m \geq N$, т.е. для последовательности $\{f(x_n)\}$ выполнены условия критерия Коши. Поэтому последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к некоторому числу b . Покажем, что число b не зависит от выбора последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к a . Действительно, пусть $\{x_n\}$ и $\{\bar{x}_n\}$ – две последовательности, сходящиеся к a . Но в таком случае последовательность x_0 , $\bar{x}_0$, x_1 , $\bar{x}_1$, ... x_n , $\bar{x}_n$ ... будет также сходиться к a и поэтому последовательность $f(x_0)$, $f(\bar{x}_0)$, $f(x_1)$, $f(\bar{x}_1)$, ... будет сходящейся. Отсюда вытекает, что две подпоследовательности рассматриваемой последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(\bar{x}_n)\}$ будут иметь один и тот же предел. Теорема доказана.

Для изучения функции одной переменной полезны также понятия односторонних пределов.

Определение. Число b называется правым (левым) пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если при любом $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ для всех $x \in A$, удовлетворяющих неравенству $0 < x - a < \delta$ $(-\delta < x - a < 0)$ имеет место неравенство: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Обозначение:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b \qquad (\lim_{x \to a-0} f(x) = b) \text{ или } f(a+0) = b \qquad (f(a-0) = b).$$

Предоставляем читателю доказать простую теорему: функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$ тогда и только тогда, когда существуют равные друг другу правый и левый пределы этой функции при $x \to a$.

В случае функции многих переменных понятием, аналогичным понятию одностороннего предела, является понятие предела функции в данном направлении. Рассмотрим это понятие.

Пусть $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$ – произвольный вектор, удовлетворяющий условию $|w| = 1$ и пусть в любой окрестности точки a имеются точки вида $x(t) = a + tw$ $(0 < t \leq t_0)$, входящие в область определения функции $f(x)$ (в трехмерном пространстве, точки $x(t)$ лежат на луче, выходящем из точки a в направлении вектора w).

Рассмотрим функцию одной переменной t:

$f(t) = f(x)$ при $x = x(t)$. Если существует предел $\lim\limits_{t \to +0} \varphi(t) = b$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет предел, равный b, в точке $x = a$ по направлению вектора w.

Если функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ предел, равный b, по любому направлению, то она имеет в этой точке предел, равный b; обратное утверждение неверно.

Пример. Рассмотрим функцию двух переменных

$$z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Эта функция по направлению $W=(W_1, W_2)$ при $x=y=0$ имеет предел, равный

$$\lim_{t\to 0} \frac{W_1^2t^2-W_2^2t^2}{W_1^2t^2+W_2^2t^2} = \frac{W_1^2-W_2^2}{W_1^2+W_2^2} = W_1^2-W_2^2 .$$

В данном случае величина предела зависит от направления, т.е. функция не имеет предела при $x=y=0$.

Мы рассмотрели понятие конечного предела функции $f(x)$. Иногда удобно рассматривать символ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, который называют бесконечным пределом функции $f(x)$ при $x\to a$. Для определения этого понятия достаточно в определении предела заменить ε на $c>0$, а неравенства $|f(x)-b|<\varepsilon$, $|f(x_n)-b|<\varepsilon$ заменить на неравенства $|f(x)|>c$, $|f(x_n)|>c$. Аналогично определяются символы

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=b, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=b, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=b,$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty .$$

Мы рассмотрели понятие предела функции $f(x)$ при $x\to a$. Иногда при изучении функций можно ограничиться менее подробной информацией о поведении функции. Рассмотрим соответствующие определения.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ на множестве A имеет порядок функции $\varphi(x)$ или $f(x)$ есть O большое от $\varphi(x)$ (обозначение $f(x)=O(\varphi(x))$), если $|f(x)\le c|\varphi(x)|$ при $x\in A$, где c - не зависящая от x положительная постоянная.

В частности, соотношение $f(x)=O(1)$ при $x \in A$ означает, что функция $f(x)$ ограничена на множестве A. Очевидно, что при $f(x)=O(\varphi_1(x))$ и $\varphi_1(x)=O(\varphi_2(x))$ для $x \in A$, имеем $f(x)=O(\varphi_2(x))$ при $x \in A$.

Пример. 1) $\sin x = O(1)$ при $x \in (-\infty, \infty)$, так как $|\sin x| \leq 1$;

2) $x = O(x^2)$ при $x \in [1, \infty]$, так как $|x| \leq x^2$ при $x \geq 1$.

Определение. Мы будем писать $f(x) = o(\varphi(x))(x \to a)$ и говорить, что функция $f(x)$ есть о малое от $\varphi(x)$ при $x \to a$, если $f(x)=\varepsilon(x)\cdot\varphi(x)$ и $\lim\limits_{x\to a}\varepsilon(x)=0$.

Будем также писать $f(x)=O(\varphi(x))(x\to a)$, если существует такая окрестность точки a, в которой

$$f(x)=O(\varphi(x))\ (x \neq a).$$

В обоих случаях функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ могут и не быть определены при $x=a$. Для функции одной переменной можно рассматривать указанные выше соотношения не в окрестности $|x-a|<\varepsilon$, а в правой (левой) окрестности $0<x-a<\varepsilon$ $(-\varepsilon<x-a<0)$.

Тогда предел $\varepsilon(x)$ при $x \to a$ следует заменить на соответствующие односторонние пределы. Можно рассматривать также случай $a=+\infty$ $(a=-\infty,\ a=\infty)$, используя в качестве соответствующих окрестностей "бесконечно удаленной точки" множества, определяемые одним из неравенств $x>c$, $x<-c$ или $|x|>c$.

Свойства введенных обозначений:

1. Если $f(x)=O(\varphi_1(x))$ $(f(x)=o(\varphi_1(x)))$ и $\varphi_1(x)=O(\varphi_2(x))$ $(\varphi_1(x)=o(\varphi_2(x)))$ при $x\to a$, то $f(x)=O(\varphi_2(x))$ $(f(x)=o(\varphi_2(x)))$ при $x \to a$

2. Если $f(x)=O(\varphi(x))$ $(\varphi(x)=o(\varphi(x)))$ при $x\to a$, то

$$f(x)\cdot\psi(x)=O(\varphi(x)\cdot\psi(x))\,(f(x)=o(\varphi(x)\psi(x)))\text{ при } x\to a$$

3. Если

$$f(x)=O(\varphi(x)) \text{ и } \psi(x)=o(\varphi(x)) \qquad \text{при } x\to a\text{, то}$$

$$f(x)+\psi(x)=O(\varphi(x)) \qquad \text{при} \quad x\to a\,.$$

Заметим, что обозначение $f(x)=o(1)$ при $x\to a$ эквивалентно соотношению

$$\lim_{x\to a} f(x)=0\,.$$

§ 3. Основные свойства предела функции

Рассмотрим свойства предела функции, которые вытекают из определения 1 и основных свойств сходящихся последовательностей

Теорема. Понятие предела функции обладает следующими свойствами:

1. Функция $f(x)$ может иметь лишь один предел при $x\to a$.

2. Если функция $f(x)$ имеет предел при $x\to a$, равный b, то в некоторой окрестности точки $x=a$ функция $f(x)$ ограничена ($x\neq a$) и сохраняет знак числа b (при $b\neq 0$).

3. Пусть существуют пределы

$$\lim_{x\to a} f_1(x)=b_1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to a} f_2(x)=b_2\,.$$

Тогда существуют пределы

$$\lim_{x\to a}[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = c_1 b_1 + c_2 b_2$$

(c_1 , c_2 - постоянные),

$$\lim_{x\to a} f_1(x) f_2(x) = b_1 \cdot b_2 ,$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{b_1}{b_2} \quad (b_2 \neq 0).$$

4. Если $f_1(x) \leq f_2(x)$ при $x \in A$ и существуют пределы функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ при $x \to a$, $\lim_{x\to a} f_1(x) = b_1$, $\lim_{x\to a} f_2(x) = b_2$, то $b_1 \leq b_2$. В частности, если $f(x) \leq c$ (c - некоторая постоянная) при $x \in A$ и существует предел

$$\lim_{x\to a} f(x) = b ,$$

то $b \leq c$.

5. Если $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ при $x \in A$ и существуют равные друг другу пределы функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ при $x \to a$, то существует также равный им предел функции $f(x)$ при $x \to a$.

6. Рассмотрим теперь свойство сложной функции одной переменной. Пусть функция $t = \varphi(x)$ задана на числовом множестве A , а областью значений этой функции является множество B . Пусть, далее, функция $f(t)$ определена на множестве B .

Если существуют пределы

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = b , \quad \lim_{t\to b} f(t) = c \quad \text{и} \quad \varphi(x) \neq b \ \text{при} \ x \neq a ,$$

то существует также предел сложной функции $z = f(\varphi(x))$ (т.е. $z = f(t)$, где $t = \varphi(x)$) при $x \to a$, равный c :

$$\lim_{x\to a} f(\varphi(x)) = \lim_{t\to b} f(t) = c.$$

В пояснении нуждается лишь доказательство второго и шестого свойства. Докажем свойство 2. Пусть функция $f(x)$ имеет предел при $x\to a$, равный b. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое δ, что $|f(x)-b|<\varepsilon$ при $x\in A$ и $0<|x-a|<\delta$. Но в таком случае при $0<|x-a|<\delta$ функция $f(x)$ ограничена, так как

$$|f(x)| = |[f(x)-b]+b| \le |f(x)-b|+|b| < \varepsilon + |b|.$$

Так как при $0<|x-a|<\delta$ выполняется неравенство $-\varepsilon<f(x)-b<\varepsilon$, то $b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$. Если $b\neq 0$, то всегда можно выбрать ε настолько малым, чтобы числа $b-\varepsilon$ и $b+\varepsilon$ имели тот же знак, что и число b (можно положить, например, $\varepsilon=\frac{|b|}{2}$). Тогда в окрестности $0<|x-a|<\delta$ функция $f(x)$ будет иметь тот же знак, что и число b.

Докажем свойство 6. Пусть $\{x_n\}$ – произвольная последовательность, сходящаяся к числу $x=a$ $(x_n\neq a)$. Тогда последовательность $\{t_n\}=\{\varphi(x_n)\}$ сходится к числу $t=b$ и $t_n\neq b$. Но в таком случае, в силу существования предела $\lim\limits_{t\to b} f(t)=c$, последовательность $\{f(t_n)\}=\{f(\varphi(x_n))\}$ сходится к числу c, что и требовалось доказать.

Свойство, аналогичное свойству 6, имеет место и для функции нескольких переменных.

6а. Пусть существуют пределы функций

$$\lim_{x\to a}\varphi_k(x)=b_k, \qquad \lim_{t\to b} f(t)=c,$$

где

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_m); \quad t = (t_1, \ldots, t_\ell); \quad k = 1, 2, \ldots, \ell;$$
$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_\ell).$$

Если $\varphi(x) \neq b$ при $x \neq a$, где $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\ell(x))$, то существует предел при $x \to a$ сложной функции от m переменных

$f(\varphi(x)) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\ell(x))$, равный c,

т.е.

$$\lim_{x \to a} f(\varphi(x)) = \lim_{t \to b} f(t).$$

Докажем справедливость этого утверждения. Так как существуют пределы

$$\lim_{x \to a} \varphi_k(x) = b_k, \quad \lim_{x \to a} f(t) = c,$$

то при любых числах $\varepsilon_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, \ell)$ и $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа δ_k $(k = 1, \ldots, \ell)$ и δ_0, что

$$|\varphi_k(x) - b_k| < \varepsilon_k \quad \text{при} \quad 0 < |x - a| < \delta_k,$$
$$|f(t) - c| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < |t - b| < \delta_0 \quad (b = (b_1, \ldots, b_\ell)).$$

Выберем ε_k из условия $\delta_0 = \sqrt{\sum_{k=1}^{\ell} \varepsilon_k^2}$ и положим $\delta = \min \delta_k$, $1 \leq k \leq \ell$. Тогда при $0 < |x - a| < \delta$ неравенства $|\varphi_k(x) - b_k| < \varepsilon_k$ будут выполняться одновременно. Полагая

$$t = \varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_\ell(x)),$$

убедимся в справедливости неравенства:

$$|f(\varphi(x))-c|<\varepsilon \qquad \text{при} \quad 0<|x-a|<\delta,$$

так как при таких значениях x имеем :

$$0<|t-b|=|\varphi(x)-b|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\ell}|\varphi_k(x)-b_k|^2}<\sqrt{\sum_{k=1}^{\ell}\varepsilon_k^2}=\delta_0 .$$

Это и означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(\varphi(x))=c$, что и требовалось доказать.

§ 4. Непрерывность функции

Пусть функция $f(x)$ одной или нескольких переменных задана на множестве A , для которого точка a является предельной и сама принадлежит A . Введем понятие непрерывности функции $f(x)$ в точке $x=a$.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x=a$, если существует предел функции $f(x)$

при $x \to a$, равный $f(a)$: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(\lim\limits_{x \to a} x) = f(a)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, то эту точку будем называть точкой непрерывности функции $f(x)$.

Дадим эквивалентное определение: функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если при любом $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при $|x-a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. При $x = a$ неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, очевидно, выполняется. Поэтому мы отбросили ограничение $|x - a| > 0$.

Если в определении непрерывности заменим $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ на односторонние пределы

$$\lim_{x \to a+0} f(x) \ , \quad \lim_{x \to a-0} f(x) \ ,$$

то мы приходим к определению непрерывности функции $f(x)$ в точке a, соответственно, справа или слева.

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана на множестве A, а точки непрерывности этой функции составляют некоторое множество $B \subseteq A$. Тогда говорят, что функция $f(x)$ непрерывна на множестве B.

Рассмотрим теперь точки, в которых функция $f(x)$ не является непрерывной.

Определение. Точка $x = a$ называется точкой разрыва функции $f(x)$, если либо

1) функция $y = f(x)$ определена в точке $x = a$, но эта точка не является точкой непрерывности $f(x)$, либо

2) точка $x = a$ является предельной точкой для области определения функции $f(x)$, но функция $f(x)$ не задана при $x = a$.

Пусть $x = a$ – точка разрыва функции $f(x)$ и существует предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, но либо этот предел не равен $f(a)$, либо при $x = a$ функция $f(x)$ не определена. Тогда точка $x = a$ называется точкой устранимого разрыва. Если же у функции одной переменной су –

ществуют односторонние пределы $f(a+0)$ и $f(a-0)$, но $f(a+0)\neq f(a-0)$ (для функции нескольких переменных условию $f(a+0)\neq f(a-0)$ соответствует условие зависимости предела в данном направлении от самого направления), то точка $x=a$ называется точкой разрыва первого рода. Во всех остальных случаях точка разрыва называется точкой разрыва второго рода.

Примеры.

1. Пусть $f(x)=\operatorname{sign} x=\begin{cases}-1 \text{ при } x<0,\\ 0 \text{ при } x=0,\\ +1 \text{ при } x>0,\end{cases}$

(sign читается: "сигнум"). Точка $x=0$ является точкой разрыва первого рода.

2. Пусть $f(x)=\frac{1}{x}$. Точка $x=0$ является точкой разрыва второго рода, так функция $f(x)$ не определена при $x=0$ и не существует пределов $f(+0)$ и $f(-0)$.

3. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{при } x\neq 0,\\ 1 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Точка $x=0$ является точкой устранимого разрыва.

4. Пусть
$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Эта функция непрерывна при $x=0$, так как

$$|f(x)-f(0)|\leq|x|<\varepsilon \quad \text{при } |x|<\varepsilon.$$

В то же время в точках вида $x_n=\frac{1}{\pi n}$, сколь угодно близких к нулю при достаточно больших n, функция принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Рассмотрим основные свойства непрерывных в точке $x=a$ функций. Эти свойства вытекают из определения непрерывности и соответствующих свойств предела функции.

Теорема. Непрерывные в точке $x=a$ функции $f(x)$

обладают следующими свойствами:

1. Если функция $f(x)$ задана в окрестности точки $x=a$ и непрерывна в точке $x=a$, то существует окрестность этой точки, в которой функция $f(x)$ ограничена и при $f(a)\neq 0$ сохраняет знак $f(a)$ в этой окрестности.

2. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке $x=a$. Тогда в этой точке непрерывны также функции $c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)$ (c_1, c_2 - произвольные постоянные), $f_1(x)\cdot f_2(x)$, $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ (при $f_2(a)\neq 0$).

3. Пусть функция $t=\varphi(x)$ задана на множестве A и имеет в качестве области значений множество B, а функция $y=f(t)$ задана на множестве B.

Если функция $t=\varphi(x)$ непрерывна при $x=a$, а функция $f(t)$ непрерывна при $t=b$ и $b=\varphi(a)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ непрерывна при $x=a$.

Заметим, что в последнем свойстве не надо накладывать дополнительного требования $\varphi(x)\neq b$ при $x\neq a$, как в соответствующем свойстве предела функции. Это связано с тем, что в определении непрерывности функции $f(t)$ при $t=b$ ограничение $t\neq b$ можно опустить, так как неравенство $|f(t)-f(b)|<\varepsilon$ при $t=b$ выполняется автоматически.

§ 5. Некоторые свойства функций, непрерывных на замкнутом ограниченном множестве

Функции, непрерывные на замкнутом ограниченном множестве, обладают целым рядом замечательных свойств. Прежде чем рассматривать эти свойства, введем понятие равномерной непрерывности.

Определение. Функция $f(x)$ одной или нескольких переменных называется равномерно непрерывной на множестве A, если при любом $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для любых двух точек $x, x'\in A$, удовлетворяющих условию $|x-x'|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(x')|<\varepsilon$.

Понятие равномерной непрерывности отличается от понятия непрерывности в любой точке $x \in A$ тем, что величина δ не зависит от x. Кроме того, точки x или x' могут не быть предельными для множества A (т.е. могут быть изолированными точками). Если x не является предельной для множества A, то может оказаться, что единственной точкой x', удовлетворяющей неравенству $|x - x'| < \delta$, является точка $x' = x$.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ задана и непрерывна на замкнутом ограниченном множестве A. Тогда эта функция обладает следующими свойствами:

I) она ограничена; 2) она достигает на множестве A своего наибольшего и наименьшего значения (т.е. функция достигает в некоторых точках x_1 и $x_2 \in A$ точных граней $\sup\limits_{x \in A} f(x)$ $\inf\limits_{x \in A} f(x)$; 3) функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве A.

Доказательство. I. Предположим, что функция $f(x)$ не ограничена на множестве A. Тогда при любом $C > 0$ должна существовать такая точка $x \in A$, что $|f(x)| > C$. Пусть $C = n$ ($n = 1, 2, \ldots$), а соответствующие точки, в которых $|f(x)| > n$, назовем x_n, т.е. $|f(x_n)| > n$. Точки x_n можно считать различными, так как всегда можно выбирать точку x_{n+1} из условия $f(x_{n+1}) > f(x_n)$. Множество точек x_n ограничено, так как множество A ограничено. Поэтому существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ последовательности $\{x_n\}$. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_{k_n} = a$.

Точка a, очевидно, является предельной для множества A и, в силу замкнутости этого множества, должна принадлежать A. Но $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_{k_n}) \neq f(a)$, так как последовательность

$\{f(x_{k_n})\}$ не ограничена.

Мы пришли к противоречию, т.е. функция $f(x)$ должна быть ограниченной на множестве A.

2. Предположим, что для всех значений $x \in A$

$$f(x) \neq \sup_{x \in A} f(x) = M .$$

Тогда функция $\varphi(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ непрерывна на множестве A и принимает положительные значения. Поэтому функция $\varphi(x)$ ограничена, т.е. найдется такое число $\mu > 0$, что $\varphi(x) < \mu$ при $x \in A$. Отсюда

$$M - f(x) > \frac{1}{\mu} , \quad f(x) < M - \frac{1}{\mu} .$$

Мы пришли к противоречию, так как нашли верхнюю грань значений функции $f(x)$, которая меньше точной верхней грани. Поэтому должна существовать точка $x_1 \in A$, для которой $f(x_1) = \sup_{x \in A} f(x)$. Точно так же доказывается существование точки $x_2 \in A$, для которой $f(x_2) = \inf_{x \in A} f(x)$.

3. Предположим, что функция $f(x)$ не будет равномерно непрерывной на множестве A. Это значит, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\delta > 0$ найдутся такие точки $x, x' \in A$, что $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$, хотя $|x - x'| < \delta$.

Выберем последовательность $\{\delta_n\}$, сходящуюся к нулю и соответствующие точки x и x' при $\delta = \delta_n$ назовем x_n и x'_n. Имеем $|f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon$ и $|x_n - x'_n| < \delta_n$.

Последовательность точек $\{x_n\}$ ограничена. Поэтому можно выбрать подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, сходящуюся к некоторой точке a. В силу замкнутости множества A имеем $a \in A$. Легко видеть, что подпоследовательность $\{x'_{k_n}\}$ также сходится к точке a, так как $|x_{k_n} - x'_{k_n}| < \delta_n$ и $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, мы нашли две последовательности $\{x_{k_n}\}$ и $\{x'_{k_n}\}$, сходящиеся к a, в то время как последовательности $\{f(x_{k_n})\}$ и $\{f(x'_{k_n})\}$, если и сходятся, то к разным пределам, так как $|f(x_{k_n}) - f(x'_{k_n})| \geqslant \varepsilon$. Мы получили противоречие с предположением о непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = a$. Таким образом, функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве A. Теорема доказана.

К доказанной теореме тесно примыкает следующая теорема о свойствах функции, непрерывной на сегменте $[a, b]$, а не на произвольном замкнутом ограниченном множестве (на концах сегмента $[a, b]$ будем подразумевать непрерывность функции $f(x)$ слева или справа, соответственно).

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Если $f(a) \neq f(b)$, то функция $f(x)$ принимает на интервале (a, b) любое значение, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$.

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) < f(b)$ (случай $f(a) > f(b)$ рассматривается аналогично) и число γ удовлетворяет условию $f(a) < \gamma < f(b)$. Рассмотрим функцию $\varphi(x) = f(x) - \gamma$. Очевидно, что $\varphi(a) < 0$, $\varphi(b) > 0$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам. Если $\varphi(\frac{a+b}{2}) = 0$, то мы нашли точку, в которой $f(x) = \gamma$. Если $\varphi(\frac{a+b}{2}) \neq 0$, то вместо сегмента $[a, b]$ на следующем этапе рассмотрим сегмент $[a_1, b_1]$, где $a_1 = \frac{a+b}{2}$, $b_1 = b$ при $\varphi(\frac{a+b}{2}) < 0$ и $a_1 = a$, $b_1 = \frac{a+b}{2}$ при $\varphi(\frac{a+b}{2}) > 0$.

Продолжая подобным же образом деление сегмента на две части, мы придем к сегментам $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$ и так далее. В результате мы получим последовательность сегментов $[a_n, b_n]$ ($n = 1, 2 \ldots$), для которых $\varphi(a_n) < 0$, $\varphi(b_n) > 0$. Если при каком-либо значении n процесс дробления сегментов оборвется, то мы нашли точку, в которой $\varphi(x) = 0$, т.е. $f(x) = \gamma$. Если же этот процесс бесконечный, то числа

a_n образуют монотонно неубывающую последовательность, ограниченную сверху, так как $a_n < b_n \leq b$. Поэтому существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$. Подобным же образом можно доказать существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Так как $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$. Из неравенства $\varphi(a_n) < 0$ вытекает, что $\varphi(x_0) \leq 0$, а из неравенства $\varphi(b_n) > 0$ вытекает, что $\varphi(x_0) \geq 0$. Поэтому $\varphi(x_0) = 0$, т.е. $f(x_0) = \gamma$. Теорема доказана.

Следствие. Функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a, b]$, принимает на этом сегменте любое значение, заключенное между $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Доказательство вытекает из рассмотренной теоремы и пункта 2 предыдущей теоремы.

Замечание. Процесс нахождения корня x_0 уравнения $\varphi(x) = 0$, описанный в теореме, носит название метода вилки и имеет практическое значение. Взяв при заданном значении n вместо корня x_0 значение $\frac{a_n + b_n}{2}$, мы получим значение x_0 с точностью до $\frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$.

Пример. Функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ непрерывна при $0 < x \leq 1$, но не равномерно непрерывна, так как при $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, $x_n' = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ и любом $\delta > 0$ условие $|x_n - x_n'| < \delta$ выполнено при $n > \sqrt{\frac{\delta}{8\pi}}$, но $|f(x_n) - f(x_n')| = 1 > \varepsilon$, если $0 < \varepsilon < 1$.

§ 6. Монотонные функции

Рассмотрим класс функций одной переменной, имеющих простые свойства, – монотонные функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется монотонно не убывающей (монотонно не возрастающей) на множестве A, если из неравенства $x_1 < x_2$ при любых значениях $x_1, x_2 \in A$ вытекает неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1 \ge f(x_2)))$. Если же из неравенства $x_1 < x_2$ вытекает неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$, то функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на множестве A . Невозрастающие, неубывающие, а также возрастающие и убывающие функции называются монотонными. Функции же возрастающие и убывающие называются строго монотонными.

Рассмотрим свойства монотонных функций.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ монотонна на интервале (a, b). Тогда в каждой точке $\xi \in (a, b)$ существуют односторонние пределы $f(\xi - 0)$ и $f(\xi + 0)$, причем значение $f(\xi)$ заключено между числами $f(\xi - 0)$ и $f(\xi + 0)$.

Доказательства. Пусть для определенности функция $f(x)$ монотонно не убывает на (a, b) (случай, когда функция $f(x)$ монотонно не возрастает на (a, b) рассматривается аналогично). При $x < \xi$ имеем $f(x) \le f(\xi)$, отсюда

$$\sup_{x < \xi} f(x) \le f(\xi).$$

Покажем, что $\sup\limits_{x < \xi} f(x) = f(\xi - 0)$. По определению точной верхней грани при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое значение $x = x_0 < \xi$, что

$$f(x_0) > \sup_{x < \xi} f(x) - \varepsilon .$$

Но в таком случае при любых значениях x , удовлетворяющих неравенству $x_0 < x < \xi$, имеем

$$\sup_{x < \xi} f(x) - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le \sup_{x < \xi} f(x).$$

Это и означает, что $\sup\limits_{x<\xi} f(x) = f(\xi - 0)$.

Так как при $x < \xi$ имеем неравенство $f(x) \leq f(\xi)$, то

$$f(\xi - 0) = \sup_{x<\xi} f(x) \leq f(\xi).$$

Аналогично доказывается, что $\inf f(x) = f(\xi + 0)$ и $f(\xi + 0) \geq f(\xi)$. Теорема доказана.

Предположим теперь, что функция $f(x)$ монотонна и непрерывна на интервале (a, b) или на сегменте $[a, b]$. Если функция $f(x)$ монотонна и непрерывна на сегменте $[a, b]$, то функция $f(x)$ принимает на сегменте $[a, b]$ все значения, заключенные между $f(a)$ и $f(b)$, так как величины $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ и $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ находятся среди величин $f(a)$ и $f(b)$ (монотонные функции могут принимать максимальные и минимальные значения лишь на границах сегмента $[a, b]$). Если же функция $f(x)$ монотонна и непрерывна на интервале (a, b), то она принимает на этом интервале все значения, заключенные между $f(a+0)$ и $f(b-0)$ (при $a < b$).

Действительно, пусть для определенности функция $f(x)$ монотонно не убывает (случай, когда функция $f(x)$ монотонно не возрастает рассматривается аналогично). В этом случае

$$f(a+0) = \inf_{x\in(a,b)} f(x), \quad f(b-0) = \sup_{x\in(a,b)} f(x).$$

Пусть число γ удовлетворяет неравенству $f(a+0) < \gamma < f(b-0)$. По определению точных граней при любом $\varepsilon > 0$ найдутся такие значения $x_1, x_2 \in (a, b)$, что $f(a+0) < f(x_1) < f(a+0) + \varepsilon$ и $f(b-0) - \varepsilon < f(x_2) < f(b-0)$. Выберем ε из условия $f(a+0) + \varepsilon < \gamma < f(b-0) - \varepsilon$. Тогда $f(x_1) < \gamma < f(x_2)$.

На сегменте $[x_1, x_2]$ функция $f(x)$ монотонна и непрерывна. Поэтому она принимает внутри этого сегмента любое значение, заключенное между $f(x_1)$ и $f(x_2)$ и,в частности, при некотором значении $x = x_0$ принимает значение равное γ, что и требовалось доказать. Утверждение остается в силе, как нетрудно показать, и при бесконечных значениях $f(a+0)$ и $f(b-0)$.

Для строго монотонных непрерывных функций $f(x)$, заданных на сегменте $[a, b]$ или на интервале (a, b) существует обратная функция.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и строго монотонна на сегменте $[a, b]$ и

$$A = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \quad , \qquad B = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \ .$$

Тогда на сегменте $[A, B]$ существует непрерывная и строго монотонная обратная функция $\varphi(y)$.

Доказательство. Мы уже показали, что функция $f(x)$ может принимать любое значение γ, заключенное между A и B. При этом по определению строго монотонной функции значение γ может соответствовать лишь одному значению $x \in [a, b]$. Это и означает, что на сегменте $[A, B]$ существует обратная по отношению к $y = f(x)$ функция $x = \varphi(y)$. Покажем, что эта функция является строго монотонной и непрерывной. Пусть для определенности функция $f(x)$ монотонно возрастает. Тогда из неравенства $x_2 > x_1$ вытекает неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ и, наоборот, из неравенства $f(x_2) > f(x_1)$ вытекает неравенство $x_2 > x_1$ (в противном случае мы пришли бы к противоречию). Положим $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. Тогда $x_1 = \varphi(y_1)$, $x_2 = \varphi(y_2)$, откуда при $y_2 > y_1$ имеем $\varphi(y_2) > \varphi(y_1)$, т.е. функция $\varphi(y)$ является монотонно возрастающей. Докажем непрерывность функции $\varphi(y)$. Пусть $x_0 \in (a, b)$, а число $\varepsilon > 0$ выбрано настолько малым, чтобы $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a, b)$. Положим

$y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$,

$\delta = \min[(y_2 - y_0), (y_0 - y_1)]$. Тогда при $|y - y_0| < \delta$ будет выполнено неравенство $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$. Действительно, $(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (y_1, y_2)$. Поэтому, в силу монотонного возрастания функции $\varphi(y)$, имеем :

$$x_0 - \varepsilon = \varphi(y_1) < \varphi(y) < \varphi(y_2) = x_0 + \varepsilon \quad \text{т.е.} \quad |\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon .$$

Это неравенство и доказывает непрерывность функции $\varphi(y)$ в точках $y_0 \in (A, B)$. Непрерывность функции $\varphi(y)$ на концах интервала (A, B) доказывается аналогично. Теорема доказана.

В условиях теоремы, как видно из доказательства, сегмент $[a, b]$ можно заменить на интервал (a, b) или полуинтервалы $[a, b)$, $(a, b]$, заменяя $[A, B]$ на (A, B), $[A, B)$ или $(A, B]$.

§ 7. Элементарные функции

I. Степенная функция

Непрерывность и строгая монотонность функции $y = x$ проверяется непосредственно. Из свойств непрерывных функций вытекает, что степенная функция $y = x^n$ (n = I,2,3 ...) также непрерывна при $-\infty < x < +\infty$. Рассмотрим эту функцию при $x > 0$. На этом интервале функция $y = x^n$ будет монотонно возрастающей и принимает значения от нуля до $+\infty$. Следовательно, существует непрерывная монотонно возрастающая функция $x = \varphi(y) = y^{1/n}$, которая называется корнем степени n из y . Из непрерывности и монотонности функций $y = x^n$ и $y = x^{\frac{1}{n}}$, а также свойств непрерывных функций, вытекает непрерывность и монотонность степенной функции $y = x^\alpha$ при произвольном рациональном $\alpha \geq 0$ в силу соотношения:

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^m)^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m \qquad (x > 0)$$

Пусть теперь α - произвольное положительное вещественное число, а α_m, $\bar{\alpha}_m$ - его m -значные десятичные приближения. При $x > 1$ из определения x^{α} имеем

$$x^{\alpha_m} < x^{\alpha} < x^{\bar{\alpha}_m} .$$

Так как $x^0 = 1$, то из непрерывности функций x^{α_m}, $x^{\bar{\alpha}_m}$ имеем :

$$\lim_{x \to 1+0} x^{\alpha_m} = \lim_{x \to 1+0} x^{\bar{\alpha}_m} = 1 .$$

Поэтому по теореме сравнения для предела функции имеем

$$\lim_{x \to 1+0} x^{\alpha} = 1 .$$

Аналогично доказывается равенство:

$$\lim_{x \to 1-0} x^{\alpha} = 1 .$$

Таким образом, функция x^{α} при $\alpha > 0$ непрерывна в точке $x = 1$. Докажем теперь непрерывность этой функции в произвольной точке x_0 при $x_0 > 0$:

$$\lim_{x \to x_0} x^{\alpha} = \lim_{x \to x_0} x_0^{\alpha} \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\alpha} = x_0^{\alpha} \lim_{t \to 1} t^{\alpha} = x_0^{\alpha} \qquad \left(t = \frac{x}{x_0}\right).$$

Таким образом, функция x^{α} непрерывна при $x > 0$, $\alpha > 0$. Если $\alpha < 0$, то непрерывность этой функции вытекает из соотношения $x^{\alpha} = \frac{1}{x^{-\alpha}}$.

Докажем монотонность степенной функции. Если $x_2 > x_1$ и $\alpha > 0$, то $\frac{x_2^{\alpha}}{x_1^{\alpha}} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha} > 1$,

т.е. функция x^{α} монотонно возрастает при $\alpha > 0$. Из соотношения $x^{\alpha} = \frac{1}{x^{-\alpha}}$ вытекает, что при $\alpha < 0$ функция x^{α} является монотонно убывающей. Область значений функции x^{α} будет интервал (0, ∞), если $x > 0$.

2. Показательная и логарифмическая функции

Рассмотрим при $a > 0$ функцию $y = a^{x}$. Если $a > 1$, то эта функция является монотонно возрастающей, так как при $x_2 > x_1$ имеем

$$\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} = a^{x_2 - x_1} > a^{0} = 1.$$

Точно так же доказывается, что функция $y = a^{x}$ при $a < 1$ является монотонно убывающей. Область определения функции a^{x} - интервал ($-\infty$, $+\infty$), область значений - интервал (0 , $+\infty$). Функция $y = a^{x}$ называется показательной функцией. Докажем непрерывность этой функции. Предварительно докажем справедливость соотношения

$$\lim_{x \to 0} a^{x} = 1,$$

Пусть для определенности $a > 1$. Тогда при $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$ имеем

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = a^{-\frac{1}{n}} < a^{x} < a^{\frac{1}{n}} .$$

Остается воспользоваться соотношением

$$\lim_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

и теоремой сравнения для пределов последовательностей. При $a < 1$ доказательство производится аналогично.

Непрерывность функции $y = a^{x}$ теперь легко доказать:

$$\lim_{x \to x_0} a^{x} = \lim_{x \to x_0} a^{x_0} \cdot a^{x - x_0} = a^{x_0} \cdot \lim_{t \to 0} a^{t} = a^{x_0} \quad (t = x - x_0).$$

По теореме о существовании у непрерывной строго монотонной функции обратной, обладающей теми же свойствами, получаем, что у функции $y = a^x$ существует непрерывная строго монотонная обратная функция, которая называется логарифмической функцией и обозначается через $x = \log_a y$. Эта функция является монотонно возрастающей при $a > 1$ и монотонно убывающей при $a < 1$. Область определения логарифмической функции - интервал $(0, +\infty)$, область значений - интервал $(-\infty, +\infty)$. Число a называется основанием функции $x = \log_a y$. Если в качестве основания взять число $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, то число

$\log_e x$ обозначается через $\ln x$ и называется натуральным логарифмом числа x. Наряду с показательной функцией в анализе широко используются функции

$$ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

$$th\,x = \frac{sh\,x}{ch\,x}, \quad cth\,x = \frac{ch\,x}{sh\,x},$$

называемые, соответственно, косинусом гиперболическим, синусом гиперболическим, тангенсом гиперболическим и котангенсом гиперболическим. Отметим свойства этих функций. Функция $ch\,x$ является четной, функции $sh\,x$, $th\,x$, $cth\,x$ - нечетными (четными называются функции $f(x)$, удовлетворяющие соотношению $f(-x) = f(x)$, а нечетными - функции, удовлетворяющие соотношению $f(-x) = -f(x)$). Область определения всех гиперболических функций - интервал $(-\infty, +\infty)$ (для $cth\,x$ точка $x = 0$ не входит в область определения).

Отметим важные соотношения, которые легко доказываются непосредственно:

$$sh(x_1 + x_2) = sh\,x_1\, ch\,x_2 + ch\,x_1\, sh\,x_2,$$

$$ch(x_1 + x_2) = ch\,x_1\, ch\,x_2 + sh\,x_1\, sh\,x_2.$$

Из них вытекают аналогичные соотношения:

$$th(x_1+x_2)=\frac{th\,x_1+th\,x_2}{1+th\,x_1\cdot th\,x_2}\,,\quad cth(x_1+x_2)=\frac{1+cth\,x_1\cdot cth\,x_2}{cth\,x_1+cth\,x_2}.$$

Все гиперболические функции принимают положительные значения при $x>0$. Кроме того, из соотношения $1=ch(x-x)=ch^2x-sh^2x$ вытекает, что $ch\,x\geqslant 1$. Области значений для гиперболических функций: $(-\infty,+\infty)$ для $sh\,x$; $[1,+\infty)$ для $ch\,x$; $(-1,+1)$ для $th\,x$; $(-\infty,-1)$ и $(1,+\infty)$ для $cth\,x$.

Функции $sh\,x$, $ch\,x$, $th\,x$ монотонно возрастают при $x>0$, а функция $cth\,x$ монотонно убывает при $x>0$. Свойства монотонности вытекают из формул для $sh(x_1+x_2)$, $ch(x_1+x_2)$, $th(x_1+x_2)$, $cth(x_1+x_2)$ (при $x<0$ свойства монотонности гиперболических функций вытекают из свойств четности или нечетности этих функций).

3. Тригонометрические функции

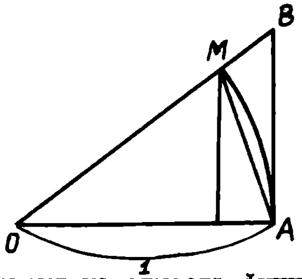
Тригонометрические функции вводятся в элементарной математике. Отметим свойства этих функций. Функция $\cos x$ - четная, функции $\sin x$, $tg\,x$, $ctg\,x$ - нечетные. Функции $\sin x$, $\cos x$ - периодические функции с периодом $2\pi=6{,}28\ldots$, т.е. удовлетворяют соотношению $f(x+2\pi)=f(x)$. Функции $tg\,x$, $ctg\,x$ - периодические с периодом π. Область определения $\sin x$, $\cos x$ - интервал $(-\infty,\infty)$, область значений этих функций - $[-1,+1]$. Область определения функций $tg\,x$ и $ctg\,x$ можно найти с помощью соотношений $tg\,x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, $ctg\,x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$. Следует отметить также следующие важные соотношения:

$$\sin(x_1+x_2)=\sin x_1\cdot\cos x_2+\cos x_1\cdot\sin x_2\ ,$$

$$\cos(x_1+x_2)=\cos x_1\cdot\cos x_2-\sin x_1\cdot\sin x_2\ ,$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\quad 1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2},\quad 1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}.$$

Для доказательства непрерывности тригонометрических функций докажем предварительно справедливость неравенства: $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Это неравенство вытекает из неравенства для площадей (см.рисунок): $S_1 < S_2 < S_3$, где S_1 – площадь треугольника OMA, S_2 – площадь сектора OMA (радиус равен I), S_3 – площадь треугольника OBA.



Так как

$$S_1=\frac{1}{2}\sin x,\quad S_2=\frac{1}{2}x,\quad S_3=\frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

то $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Используя нечетность функций $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, можно получить более общее неравенство $|\sin x|\le|x|\le|\operatorname{tg} x|$ при $|x|<\frac{\pi}{2}$.

Отметим, кроме того, неравенство $1-\cos x=2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\le\frac{x^2}{2}$ при $|x|<\frac{\pi}{2}$.

Из приведенных неравенств вытекают соотношения $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$, с помощью которых легко доказать непрерывность функции $\sin x$:

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\lim_{t\to 0}\sin(x_0+t)=\lim_{t\to 0}(\sin x_0\cos t+\cos x_0\sin t)=\sin x_0.$$

Так же доказывается непрерывность функции $\cos x$. Непрерывность же функций $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ вытекает из соотношений:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Из определения функции $\sin x$ вытекает, что $\sin x$ монотонно возрастает при $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и монотонно убывает при $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Другие области монотонного изменения функции $\sin x$ вытекают из ее периодичности. Области монотонного изменения функции $\cos x$ легко найти из соотношения $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. В областях строго монотонного изменения функций $\sin x$, $\cos x$ можно ввести строго монотонные непрерывные обратные функции:

$$y = \arcsin x \left(-1 \leq x \leq +1, \ -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right) \text{ и}$$

$$y = \arccos x \ (-1 \leq x \leq +1, \ 0 \leq y \leq \pi).$$

Аналогично вводятся функции;

$$y = \operatorname{arctg} x \left(-\infty < x < +\infty, \ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y = \operatorname{arcctg} x \ (-\infty < x < +\infty, \ 0 < y < \pi).$$

Отметим следующие связи введенных обратных тригонометрических функций:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Если использовать другие участки монотонного изменения тригонометрических функций, то возникают так называемые другие ветви обратных тригонометрических функций. Всю совокупность функций, обратных по отношению к функциям $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ обозначают соответственно через

$$\operatorname{Arcsin} x, \ \operatorname{Arccos} x, \ \operatorname{Arctg} x, \ \operatorname{Arcctg} x.$$

Укажем связь этих функций с функциями $\arcsin x$, $\arccos x$ $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Arcsin} x = (-1)^n \arcsin x + \pi n,\\
&\operatorname{Arccos} x = \pm \arccos x + 2\pi n,\\
&\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + \pi n,\\
&\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + \pi n
\end{aligned}$$

$$(n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Все рассмотренные нами функции обычно называют простейшими элементарными функциями. Функции, которые можно получить из этих функций посредством алгебраических действий и составления сложных функций называются элементарными функциями.

В заключение рассмотрим некоторые предельные соотношения для элементарных функций, которыми мы в дальнейшем будем пользоваться. Эти соотношения иногда называют замечательными пределами.

I. Докажем соотношение:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Так как функция $\frac{\sin x}{x}$ - четная, то достаточно рассмотреть правый предел. Будем исходить из неравенства $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Из него вытекает, что $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$, т.е. $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Если воспользоваться теоремой сравнения для пределов, то отсюда непосредственно получаем нужное нам соотношение:

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2. Докажем соотношение:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Рассмотрим два случая - $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

а) $x \to +\infty$. Обозначим через $[x]$ целую часть числа x. Имеем

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} \le \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

Если положить $[x] = n$ и воспользоваться доказанным ранее соотношением $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, то по теореме сравнения для пределов и получаем требуемое соотношение в силу того, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

б) $x \to -\infty$. Положим $x = -(1+t)$.

При $x \to -\infty$ имеем $t \to +\infty$. Отсюда

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{1+t}\right)^{-(1+t)} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-(1+t)}} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{1+t} = e.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

Это предельное соотношение часто удобно использовать в другом виде, заменяя x на $\frac{1}{x}$:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Рассмотрим некоторые следствия рассматриваемого соотношения.

Примеры:

I) $$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} =$$

$$= \log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$$

Мы воспользовались непрерывностью логарифмической функции.

2) $$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)} =$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t}} = \ln a \qquad (t = a^x - 1).$$

Глава 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ I. Производная и дифференциал

С помощью понятия предела функции можно ввести очень полезные понятия производной и дифференциала функции.

Рассмотрим сначала эти понятия для функций одной переменной.

Определение. Производной от функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при $x \to x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

Укажем другие часто используемые обозначения:

$$f(x)-f(x_0) = \Delta f(x), \quad x - x_0 = \Delta x,$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если под пределом подразумевать односторонний предел, то мы приходим к понятию левой и правой производной в точке x_0.

Обозначения:

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'_+(x_0),$$

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'_-(x_0).$$

С понятием производной тесно связано понятие дифференциала.

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, если ее приращение $\Delta f(x)$, соответствующее приращению Δx независимой переменной, можно записать в виде:

$$\Delta f(x) = A \Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0),$$

где A - некоторая постоянная. Величина $A\Delta x$ называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначение:

$$df(x_0) = A\Delta x, \quad \Delta x = dx, \text{ т.е. } df(x_0) = A\,dx.$$

Имеет место следующая теорема, связывающая понятия производной и дифференциала.

Теорема. Для того, чтобы функция $f(x)$ имела производную в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы она была дифференцируемой в этой точке.

Доказательство. Пусть $\Delta f(x) = A\Delta x + o(\Delta x)$. Тогда

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A,$$

т.е. существует $f'(x_0)$ и $f'(x_0) = A$. Предположим теперь, что существует $f'(x_0)$. Имеем

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

откуда

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x_0) + o(1) \quad (\Delta x \to 0)$$ или

$$\Delta f(x) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0),$$

т.е. функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Теорема доказана.

Покажем теперь связь понятия дифференцируемости функции с непрерывностью.

Теорема. Функция $f(x)$, дифференцируемая в точке x_0, непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть $\Delta f(x) = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) + \lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(x) =$$

$$= f(x_0) + A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x\to 0} o(\Delta x) = f(x_0),$$

что и требовалось доказать.

Замечания

I) Так как $df(x) = f'(x)dx$, то часто используется обозначение;

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx} .$$

Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную, равную $+\infty$ или $-\infty$, если

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = +\infty \text{ или } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\infty .$$

Рассмотрим теперь понятие производной и дифференциала для функции нескольких переменных. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$,

$\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m)$, $\Delta_k x = \Delta x$

при $\Delta x_j = 0$ для $j \neq k$

($\Delta_k x$ - частное приращение Δx, соответствующее приращению Δx_k переменной с номером k),

$$\Delta_k f(x) = f(x + \Delta_k x) - f(x) .$$

Если существует предел

$$\lim_{\Delta_k x \to 0} \frac{\Delta_k f(x)}{\Delta x_k} ,$$

то этот предел называется частной производной по переменной x_k функции

$f(x)$ в точке x, Обозначение:

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k f(x)}{\Delta x_k} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = f'_{x_k}(x).$$

Мы рассматривали приращения функции $\Delta_k f(x)$, соответствующие приращению переменной с номером k. Можно рассматривать приращения функции, связанные с приращением x по любому направлению $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$ и ввести понятие производной по направлению ω:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial \omega} = \lim_{t \to +0} \frac{f(x+t\omega)-f(x)}{t}, \quad |\omega| = 1.$$

Если $\omega_j = 0$ при $j \neq k$, $\omega_k = 1$, то $\frac{\partial f(x)}{\partial \omega} = f'_{x_k}(x)$.

С понятием частных производных тесно связано понятие полного дифференциала.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x. Если приращение функции $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ в этой окрестности можно представить в виде:

$$\Delta f(x) = \sum_{k=1}^{m} A_k \Delta x_k + o(|\Delta x|),$$

где постоянные A_k не зависят от Δx, то говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке x. Сумма $\sum_{k=1}^{m} A_k \Delta x_k$ называется полным дифференциалом функции $f(x)$ и обозначается через $df(x)$. Приращения независимой переменной Δx_k называют дифференциалом этой переменной и обозначают через dx_k. Поэтому

$$df(x)=\sum_{k=1}^{m}A_k\,dx_k\ .$$

Легко показать, что функция $f(x)$, дифференцируемая в точке x, непрерывна в этой точке. Действительно, в этом случае

$$\lim_{\Delta x\to 0}f(x+\Delta x)=f(x)+\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]=$$

$$=f(x)+\lim_{\Delta x\to 0}\left[\sum_{k=1}^{m}A_k\,\Delta x_k+o(|\Delta x|)\right]=f(x),$$

что и требовалось доказать.

Укажем на связь понятий дифференцируемости и частных производных. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x Тогда

$$\Delta_k f(x)=A_k\Delta x_k+o(|\Delta x_k|)\ .$$

Отсюда вытекает существование частной производной $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ и равенство $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}=A_k$. Поэтому $df(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}\,dx_k$.

Легко показать, что существования всех частных производных недостаточно для дифференцируемости функции в данной точке.

Пример. Пусть $f(x)=0$ в точках, где хотя бы одна из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ равна нулю и $f(x)=1$ в других точках. В этом случае существуют все частные производные при $x=0$, но функция не дифференцируема в этой точке, так как она даже не непрерывна в ней.

В дальнейшем будет доказано, что достаточным условием дифференцируемости функции $f(x)$ является требование непрерывности частных производных в рассматриваемой точке.

§ 2. Свойства производных и дифференциалов для функций одной переменной

Рассмотрим основные свойства производной для функций одной переменной.

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x. Тогда существует также в этой точке производные функций $c_1 u(x) + c_2 v(x)$ (c_1 , c_2 – постоянные), $u(x)\,v(x)$, $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ (при $v(x) \neq 0$), причем

$$[c_1 u(x) + c_2 v(x)]' = c_1 u'(x) + c_2 v'(x),$$

$$[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x),$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \qquad (v(x) \neq 0).$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы вытекает из свойств предела функции.

$$1)\ [c_1 u(x) + c_2 v(x)]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[c_1 u(x+\Delta x) + c_2 v(x+\Delta x)] - [c_1 u(x) + c_2 v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[c_1 \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + c_2 \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}\right] = c_1 u'(x) + c_2 v'(x).$$

$$2)\,[u(x)v(x)]' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)v(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\, v(x+\Delta x) + u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x).$$

$$3)\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{v(x)\cdot v(x+\Delta x)}\cdot\frac{v(x)u(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{v^2(x)}\lim_{\Delta x\to 0}\left[v(x)\,\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} - u(x)\,\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Теорема доказана.

Для практических целей удобна также следующая теорема о производной сложной функции.

Теорема. Пусть задана сложная функция $f[\varphi(x)]$, функция $\varphi(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $f(t)$ имеет производную в точке $t_0 = \varphi(x_0)$. Тогда функция $y = f[\varphi(x)]$ имеет производную в точке x_0, равную $f'(t_0)\cdot\varphi'(x_0)$.

Доказательство. Функции $\varphi(x)$ и $f(t)$ дифференцируемы соответственно в точках x_0 и $t_0 = \varphi(x_0)$, откуда $\Delta\varphi(x) = \varphi'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)$,

$$\Delta f(t) = f'(t_0)\Delta t + o(\Delta t) \qquad (\Delta t \to 0).$$

Положим $t = \varphi(x)$, $t_0 = \varphi(x_0)$. Тогда при $\Delta x \to 0$ будет и $\Delta t \to 0$, где $\Delta t = t - t_0$. Далее,

$$f[\varphi(x)] - f[\varphi(x_0)] = \Delta f(t) = f'(t_0)\left[\varphi'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)\right] +$$

$$+ o\left[\varphi'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)\right] = f'(t_0)\cdot\varphi'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

$$(\Delta x \to 0).$$

Из этого соотношения вытекает, что функция $f[\varphi(x)]$ дифференцируема в точке x_0, причем

$$\left\{f[\varphi(x)]\right\}'\Big|_{x = x_0} = f'(t_0)\cdot\varphi'(x_0) \text{ при } t_0 = \varphi(x_0).$$

Теорема доказана.

Следствие. Пусть функция $x = \varphi(y)$ является обратной по отношению к функции $y = f(x)$ и функции $f(x)$, $\varphi(y)$ имеют производные соответственно в точках x_0 и $y_0 = f(x_0)$. Найдем связь производных $f'(x_0)$ и $\varphi'(y_0)$. Имеем $x = \varphi[f(x)]$, откуда $1 = \varphi'(y_0)\cdot f'(x_0)$, т.е. $\varphi'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Можно доказать и более строгое утверждение.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна, строго монотонна на интервале (a, b) и имеет производную $f'(x_0)$ в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда обратная функция $x = \varphi(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, равную $\dfrac{1}{f'(x_0)}$, если $f'(x_0) \neq 0$.

Доказательство. Из непрерывности прямой и обратной функции вытекает, что $\Delta y = \Delta f(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, и наоборот. Так как $\Delta \varphi(y) = \Delta x$, то

$$\frac{\Delta \varphi(y)}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}}$$

и, следовательно, из существования предела

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

при $f'(x_0) \neq 0$ вытекает существование предела $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta \varphi(y)}{\Delta y}$

и равенство

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

Мы рассмотрели ряд правил вычисления производных. Приведем соответствующие формулы для дифференциалов:

пусть $u = u(x)$, $v = v(x)$;

тогда $d(u + v) = du + dv$,

$$d(u \cdot v) = u\,dv + v\,du$$

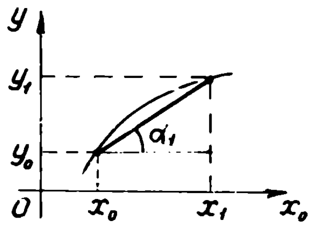
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \qquad (v \neq 0).$$

Теорема о производной сложной функции дает:

$$df[\varphi(x)] = \{f[\varphi(x)]\}' dx = f'(t) \cdot \varphi'(x) dx = f'(t) dt,$$

где $t = \varphi(x)$. Полученное соотношение показывает, что дифференциал и производная сложной функции $y = f(t) \big|_{t = \varphi(x)}$ связаны с дифференциалом зависимой переменной $t = \varphi(x)$ таким же образом, как и в случае, когда переменная t рассматривается как независимая переменная. Это свойство называется инвариантностью формы записи дифференциала.

В заключение укажем геометрическую интерпретацию производной. Рассмотрим график функции $y=f(x)$ (см. рисунок).



Проведем через точки x_0, $y_0=f(x_0)$ и $x=x_1$, $y_1=f(x_1)$ прямую линию и назовем ее секущей, проходящей через эти точки. Точки секущей с координатами (x,y) удовлетворяют равенству:

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\operatorname{tg}\alpha_1,$$

где α_1 – угол между секущей и осью x.

Перепишем это равенство в виде

$$y=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot(x-x_0).$$

Назовем касательной к кривой $y=f(x)$ в точке x_0 прямую, к которой в пределе приближается секущая, когда $x_1\to x_0$.

Легко показать, что для функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0, касательная существует. Действительно, в этом случае

$$\lim_{x_1\to x_0}\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\lim_{x_1\to x_0}\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f'(x_0),$$

так что уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0 будет $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

При этом тангенс угла α между касательной и осью x, очевидно, вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y-y_0}{x-x_0}=f'(x_0).$$

§ 3. Производные элементарных функций

Мы рассмотрели ряд теорем, которые дают правила вычисления производных для функций одной переменной. Эти правила позволяют вычислять производные любых элементарных функций, если известны производные простейших элементарных функций. Докажем, что для производных простейших элементарных функций имеют место следующие выражения :

1) $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$;

2) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, 3) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x>0)$;

4) $(x^n)' = n x^{n-1}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, x \in (-\infty, +\infty))$;

5) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

6) $(\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$$(\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

7) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$, $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$,

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Доказательство.

1) $(a^x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a;$

2) $(\ln x)' = \dfrac{1}{(e^y)'_{y=\ln x}} = \dfrac{1}{e^y \big|_{y=\ln x}} = \dfrac{1}{x}$;

3) $(x^{\alpha})' = (e^{\alpha \ell n x})' = e^{\alpha \ell n x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$.

4) $(x^{0})' = (1)' = 0$.

Пусть $n = 1, 2, \dots$.

Тогда $(x^{n})' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^{n} - x^{n}}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n x^{n-1} \Delta x + o(\Delta x)}{\Delta x} = n x^{n-1} .$$

Если $n = -1, -2, \dots$, то

$$(x^{n})' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' = \frac{n x^{-n-1}}{x^{-2n}} = n x^{n-1} .$$

5) $(\sin x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} +$$

$$+ \lim_{\Delta x \to 0} \cos x \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = \cos x ,$$

так как $|\cos \Delta x - 1| \le \dfrac{[\Delta x]^{2}}{2}$ при $|\Delta x| < \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$.

Далее, $(\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$.

Производные $(tg\, x)'$ и $(ctg\, x)'$ вычисляются с помощью соотношений:

$$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad ctg\,x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \sin^2 x + \cos^2 x = 1 .$$

6) производные обратных тригонометрических функций можно найти с помощью выражений для производных тригонометрических функций, если использовать правило дифференцирования обратных функций. Пусть, например,

$$y = \arcsin x .$$

Тогда $x = \sin y$ и

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} .$$

Мы воспользовались тем, что $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ $\cos y \geq 0$;

7) производные от гиперболических функций можно найти, если выразить эти функции через показательные функции e^x и e^{-x} .

Например :

$$(sh\,x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left[(e^x)' - (e^{-x})'\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\,(e^x + e^{-x}) = ch\,x ;$$

$$(ch\,x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left[(e^x)' + (e^{-x})'\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = sh\,x .$$

§ 4. Возрастание и убывание в точке функции одной переменной. Локальный экстремум

Рассмотрим значения функции $y=f(x)$ - функции одной переменной в некоторой δ - окрестности фиксированной точки x. Обозначим, как и ранее, $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Определение. Будем говорить, что функция $y=f(x)$

1) возрастает (убывает) в точке x, если существует такое $\delta > 0$, что $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0\right)$ при $0 < |\Delta x| < \delta$, т.е. величины Δy и Δx имеют одинаковые (противоположные) знаки;

2) достигает локального максимума (минимума) в точке x, если существует такое $\delta > 0$, что $\Delta y \leq 0$ $(\Delta y \geq 0)$ при $\Delta x < \delta$.

Локальные максимум и минимум объединяются под общим названием - локальный экстемум. Заметим, что функция не может одновременно иметь локальный экстремум и возрастать или убывать в данной точке.

Укажем простые признаки возрастания и убывания функции, а также признаки локального экстремума.

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет в точке x положительную (отрицательную) производную, то она возрастает (убывает) в этой точке.

Доказательство. Пусть $f(x) > 0$.

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) > 0$$

и поэтому величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ сохраняет знак $f'(x)$ в некоторой δ - окрестности точки x. В этой окрестности

$\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, т.е. функция $y = f(x)$ возрастает в рассматриваемой точке x . Аналогично рассматривается случай $f'(x) < 0$.

Из доказанной теоремы следует теорема Ферма : если функция $f(x)$ достигает в точке x локального экстремума и в этой точке существует производная $f'(x)$, то $f'(x) = 0$.

Действительно, если $f'(x) \neq 0$, то функция $f(x)$ возрастает или убывает в точке x и потому не может иметь экстремума в этой точке.

Таким образом, мы доказали, что необходимым условием существования экстремума в точке x является равенство $f'(x) = 0$ (если $f'(x)$ существует). Достаточные условия существования экстремума можно получить с помощью теорем о среднем значении функции, к рассмотрению которых мы сейчас перейдем.

Теорема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, имеет производную на интервале (a, b) и принимает равные значения на концах интервала (a, b) . Тогда на интервале (a, b) существует хотя бы одна точка c , в которой $f'(c) = 0$.

Доказательство. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она достигает своего максимального и минимального значения в некоторых точках $c_1, c_2 \in [a, b]$. Если c_1 , c_2 находятся на концах интервала, например, $f(a) = f(c_1)$, $f(b) = f(c_2)$, то в силу равенства $f(a) = f(b)$ максимальное и минимальное значение функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ совпадают. В этом случае $f(x) = f(a)$ и, следовательно, $f'(x) = 0$ при $x \in (a, b)$. Таким образом, в этом случае утверждение теоремы тривиально. Пусть теперь хотя бы одна из точек c_1, c_2 не совпадает с концами интервала (a, b).

Пусть, например, $c_1 \neq a$ и $c_1 \neq b$. Тогда в точке c_1 функция $f(x)$ имеет локальный экстремум и потому по теореме Ферма $f'(c_1) = 0$. Теорема доказана.

Теорема Коши о среднем значении. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на сегменте $[a, b]$ и имеют производные на интервале (a, b), одновременно не обращающиеся в нуль, причем $\varphi(b) \neq \varphi(a)$. Тогда на интервале (a, b) найдется точка c, для которой имеет место равенство:

$$\frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)} .$$

Доказательство. Рассмотрим линейную комбинацию функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$: $f(x) = A\varphi(x) + B\psi(x)$.

Подберем постоянные A и B (не равные нулю одновременно) таким образом, чтобы удовлетворялись условия теоремы Ролля для функции $f(x)$: $f(a) = f(b)$, т.е.

$$A[\varphi(b) - \varphi(a)] + B[\psi(b) - \psi(a)] = 0 .$$

Можно положить, например,

$$B = 1, \quad A = \frac{\psi(b) - \psi(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} .$$

Тогда на интервале (a, b) найдется такая точка c, в которой $f'(c) = 0$, т.е. $A\varphi'(c) + B\psi'(c) = 0$.

Мы получили относительно постоянных A и B систему линейных однородных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &A[\varphi(b)-\varphi(a)]+B[\psi(b)-\psi(a)]=0\\ &A\varphi'(c)+B\psi'(c)=0\end{aligned}\right\}.$$

Так как эта система имеет нетривиальное решение, то детерминант этой системы равен нулю, т.е.

$$[\varphi(b)-\varphi(a)]\psi'(c)-[\psi(b)-\psi(a)]\varphi'(c)=0 .$$

Из этого равенства видно, что $\varphi'(c)\neq 0$, так как в противном случае $\varphi'(c)=0$ и $\psi'(c)=0$, что невозможно по условию теоремы. Поэтому полученное равенство можно переписать в виде:

$$\frac{\psi(b)-\psi(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{\psi'(c)}{\varphi'(c)} .$$

Теорема доказана.

Следствие. Полагая в теореме Коши $\psi(x)=x$, получаем формулу, которая называется формулой Лагранжа для конечных приращений: $\varphi(b)-\varphi(a)=\varphi'(c)(b-a)$.

Во всех рассмотренных теоремах точку $c\in(a,b)$ часто удобно представить в виде:

$$c=a+\theta(b-a) , \qquad \text{где } 0<\theta<1 .$$

Рассмотрим ряд теорем, вытекающих из формулы Лагранжа.

Теорема. Функция $f(x)$, непрерывная на сегменте $[a,b]$ и имеющая неотрицательную (положительную) производную на интервале (a,b), не убывает (возрастает) на сегменте $[a,b]$.

Доказательство. Пусть $a\leq x_1<x_2\leq b$. По формуле Лагранжа для конечных приращений имеем:

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)f'(c)\geq 0 \qquad (x_1<c<x_2),$$

т.е. $f(x_2)\geq f(x_1)$. Если $f'(x)>0$ на интервале

(a, b), то $f'(c) > 0$ и, следовательно, $f(x_2) > f(x_1)$. Теорема доказана.

С помощью замены $f(x)$ на $-f(x)$ из теоремы легко получить аналогичную теорему: если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет на интервале (a, b) неположительную (отрицательную) производную, то она не возрастает (убывает) на сегменте $[a, b]$.

В приведенных двух теоремах сегмент $[a, b]$ можно заменить на интервал (a, b) (проверить самостоятельно).

Теорема. Если на интервале (a, b) производная функции $f(x)$ равна нулю, то функция $f(x)$ постоянна на этом интервале.

Доказательство. Пусть $a < x_1 < x_2 < b$. По формуле Лагранжа имеем: $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c) = 0$ $(x_1 < c < x_2)$, т.е. функция $f(x)$ при любых значениях $x_1, x_2 \in (a, b)$ удовлетворяет равенству $f(x_2) = f(x_1)$. Теорема доказана.

С помощью формулы Лагранжа можно получить достаточные условия локального экстремума.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой окрестности производную, удовлетворяющую условиям: $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ при $x > x_0$, $f'(x) \leq 0$ $(f'(x) \geq 0)$ при $x < x_0$. Тогда функция $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный минимум (максимум).

Доказательство. По формуле Лагранжа в рассматриваемой окрестности точки x_0 имеем:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \qquad (c \in (x, x_0)).$$

Поэтому в силу условий теоремы и при $x > x_0$ и при $x < x_0$ имеем $f'(c)(x - x_0) \geq 0$, $(f'(c)(x - x_0) \leq 0)$, т.е. $f(x) \geq f(x_0)$ $(f(x) \leq f(x_0))$. Следовательно, в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный минимум (максимум). Теорема доказана.

Условия теоремы можно упростить, если предположить существование второй производной $f''(x_0)$.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в окрестности точки x_0 и вторую производную $f''(x)$ в самой точке x_0. Если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$, то точка x_0 есть точка локального минимума (максимума) для функции $f(x)$.

Доказательство. Из существования производной $f'(x)$ в окрестности точки x_0 вытекает непрерывность функции $f(x)$ в этой окрестности.

Покажем, что условия предыдущей теоремы выполнены полностью. Так как $f''(x_0) > 0$ $(f''(x_0) < 0)$, то функция $f'(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0. Так как, кроме того, $f'(x_0) = 0$, то в некоторой окрестности точки x_0 будет $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ при $x > x_0$ и $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ при $x < x_0$. Поэтому из предыдущей теоремы вытекает, что при $x = x_0$ функция $f(x)$ имеет локальный минимум (максимум). Теорема доказана.

Пример. Найдем точки локального экстремума функции $f(x) = x^{\alpha} e^{-\beta x}$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ x > 0)$ и выясним их характеристики.

Так как $f'(x) = x^{\alpha-1} e^{-\beta x}(\alpha - \beta x) = 0$, то $f'(x) = 0$ при $x = \frac{\alpha}{\beta}$, $f'(x) > 0$ при $x < \frac{\alpha}{\beta}$, $f'(x) < 0$ при $x > \frac{\alpha}{\beta}$. Поэтому точка $x = \frac{\alpha}{\beta}$ является точкой максимума для функции $f(x) = x^{\alpha} e^{-\beta x}$.

§ 5. Условия дифференцируемости функции нескольких переменных.

Дифференцирование сложной функции

Формула Лагранжа конечных приращений позволяет получить достаточные условия дифференцируемости функции $f(x)$ нескольких переменных.

Теорема. Если частные производные $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ определены в некоторой окрестности точки x и непрерывны в самой точке x то функция $f(x)$ дифференцируема в этой точке.

Доказательство. Приведем полное приращение функции

$$\Delta f(x) = f(x_1+\Delta x_1, x_2+\Delta x_2, \dots, x_m+\Delta x_m) - f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

к сумме приращений, в каждом из которых меняется значение лишь одной из переменных. Введем обозначения:

$$f_k(x) = f(x_1+\Delta x_1, \dots, x_{k-1}+\Delta x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_m),$$

$$f_1(x) = f(x_1, \dots, x_m), \quad f_{m+1}(x) = f(x_1+\Delta x_1, \dots, x_m+\Delta x_m).$$

Тогда

$$\Delta f(x) = f_{m+1}(x) - f_1(x) = [f_{m+1}(x) - f_m(x)] + [f_m(x) - f_{m-1}(x)] +$$

$$+ \dots [f_2(x) - f_1(x)] = \sum_{k=1}^{m} [f_{k+1}(x) - f_k(x)].$$

Воспользуемся для каждого члена суммы формулой Лагранжа конечных приращений:

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = f(x_1+\Delta x_1, \dots, x_{k-1}+\Delta x_{k-1}, x_k+\Delta x_k, x_{k+1}, \dots, x_m) -$$

$$- f(x_1+\Delta x_1, \dots, x_{k-1}+\Delta x_{k-1}, x_k, \dots, x_m) =$$

$$= \frac{\partial f \quad (x_1+\Delta x_1, \dots, x_{k-1}+\Delta x_{k-1}, \tilde{x}_k, x_{k+1}, \dots, x_m)}{\partial x_k} \, \Delta x_k,$$

где

$$\tilde{x}_k \in (x_k, x_k+\Delta x_k).$$

В силу непрерывности частных производных $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ в окрестности рассматриваемой точки x имеем:

$$\frac{\partial f\ (x_1+\Delta x_1,\dots,x_{k-1}+\Delta x_{k-1},\tilde{x}_k,x_{k+1},\dots,x_m)}{\partial x_k}=\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}+o(1)$$

при $|\Delta x|\to 0$.

Поэтому $f_{k+1}(x)-f_k(x)=\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}\Delta x_k+o(|\Delta x|)$,

и, следовательно,

$$\Delta f(x)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f\ \ (x)\Delta x_k+o(|\Delta x|),}{\partial x_k},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, для того, чтобы функция $f(x)$ была дифференцируемой в точке x необходимо, чтобы она имела в этой точке частные производные и достаточно, чтобы частные производные существовали в некоторой окрестности точки x и были непрерывны в самой точке x.

Выражение для дифференциала функции

$$df(x)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_k}\Delta x_k$$

является скалярным произведением векторов

$$\nabla f(x)=\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1},\frac{\partial f(x)}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial f(x)}{\partial x_m}\right)$$ и

$$\Delta x=(\Delta x_1,\dots,\Delta x_m),$$

т.е. $df(x)=\nabla f(x)\cdot\Delta x$.

Вектор $\nabla f(x)$ называется градиентом функции $f(x)$ и обозначается иногда через $\operatorname{grad} f(x)$ (∇ читается:"набла").

Воспользуемся понятием градиента для удобной записи производной по направлению $\omega=(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_m)$, где $|\omega|<1$.

Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial\omega}=\lim_{t\to+0}\frac{f(x+t\omega)-f(x)}{t}=\lim_{t\to+0}\frac{\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}t\omega_k+o(|t\cdot\omega|)}{t}=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\omega_k=\nabla f(x)\cdot\omega.$$

Отметим следующее свойство производной по направлению: $\left|\frac{\partial f}{\partial \omega}\right| = \left|\nabla f(x)\right|$. Для доказательства достаточно воспользоваться неравенством Коши-Буняковского:

$$\left|\nabla f(x)\cdot\omega\right| \leq \left|\nabla f(x)\right|\cdot\left|\omega\right| = \left|\nabla f(x)\right| .$$

При этом $\frac{\partial f}{\partial \omega} = \left|\nabla f(x)\right|$, если $\omega = \frac{\nabla f(x)}{\left|\nabla f(x)\right|}$.

Таким образом, модуль производной по направлению ω не превышает модуля градиента функции, причем наибольшее значение производной по направлению ω будет в том случае, если вектор ω направлен по градиенту функции $f(x)$ (наибыстрейшее возрастание функции $f(x)$ будет по направлению градиента этой функции).

Рассмотрим теперь вопрос о дифференцируемости сложной функции

$$f(\varphi(x)) = f(t)\big|_{t=\varphi(x)} .$$

Здесь $x=(x_1,\dots,x_m)$, $t=(t_1,\dots,t_\ell)$,

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\dots,\ \varphi_\ell(x)) .$$

Теорема. Пусть функции $\varphi_k(x)$ $(k=1,\dots,\ell)$ и $f(t)$ дифференцируемы в точках $x=a$ и $t=b=\varphi(a)$, соответственно. Тогда сложная функция $F(x)=f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке $x=a$.

Доказательство. В силу дифференцируемости функций $\varphi_k(x)$ и $f(t)$ в точках $x=a$ и $t=b$, соответственно, имеем:

$$\Delta\varphi_k(x) = \varphi_k(x) - \varphi_k(a) = \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial\varphi}{\partial x_p}\bigg|_{x=a} \Delta x_p + o(|\Delta x|) ;$$

$$\Delta f(t) = f(t) - f(b) = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial f}{\partial t_k}\bigg|_{t=b} \Delta t_k + o(|\Delta t|)$$

$$(\Delta x = x-a,\ \ \Delta t = t-b,\ \ \Delta x_p = x_p - a_p,\ \ \Delta t_k = t_k - b_k).$$

Полагая $t_k=\varphi_k(x)$, для сложной функции $F(x)=f(\varphi(x))$

получим:

$$\Delta F(x) = F(x) - F(a) = f(\varphi(x)) - f(\varphi(a)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial f}{\partial t_k}\bigg|_{t=b} \cdot \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_p}\bigg|_{x=a} \cdot \Delta x_p + o(|\Delta x|) .$$

Мы воспользовались тем, что при $t_k = \varphi_k(x)$ будем иметь $\Delta t_k = \Delta\varphi_k(x) = O(|\Delta x|)$. Таким образом, мы в приращении сложной функции $f(\varphi(x))$ выделили часть приращения, линейную относительно приращений Δx_p и получили добавок к этому приращению, который оценивается как $o(|\Delta x|)$. Это и доказывает, что сложная функция $f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке $x = a$.

При доказательстве теоремы мы получили для сложной функции $f(\varphi(x))$ соотношение :

$$df(\varphi(x)) = \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{p=1}^{m} \frac{\partial f(t)}{\partial t_k} \frac{\partial t_k}{\partial x_p}\bigg|_{t_k=\varphi_k(x)} dx_p =$$

$$= \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial f(t)}{\partial t_k} dt_k\bigg|_{t_k=\varphi_k(x)} .$$

Таким образом,

$$df(\varphi(x)) = df(t)\bigg|_{t_k=\varphi_k(x)} = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial f(t)}{\partial t_k} dt_k\bigg|_{t_k=\varphi_k(x)} .$$

Это означает инвариантность формы записи дифференциала $df(t)$, т.е. независимость записи от того, являются ли переменные t_k

независимыми или они являются функциями переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Кроме того, из полученного равенства вытекает следующее правило вычисления частных производных сложной функции

$$\frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial x_p} = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial f(t)}{\partial t_k} \cdot \frac{\partial t_k}{\partial x_p} \Bigg|_{t_k = \varphi_k(x)} .$$

В частности, при $m = 1$ имеем:

$$\frac{d f(\varphi(x))}{d x} = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\partial f(t)}{\partial t_k} \cdot \frac{d t_k}{d x} \Bigg|_{t_k = \varphi_k(x)} .$$

Полученная формула позволяет обобщить формулу Лагранжа для конечных приращений на случай функции нескольких переменных. Пусть x_1 и x_2 – заданные точки из области определения функции $f(x)$. Предположим, что все точки вида

$x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1)$ $(0 \leq t \leq 1)$ принадлежат

области определения функции $f(x)$. Рассмотрим функцию одной переменной $\varphi(t) = f(x(t))$. Тогда $\varphi(0) = f(x_1)$, $\varphi(1) = f(x_2)$. Если во всех точках вида $x = x(t)$ функция $f(x)$ дифференцируема, то функция $\varphi(t)$ дифференцируема при $0 < t < 1$, причем

$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \Bigg|_{x = x(t)} \cdot \Delta x_k .$$

По формуле Лагранжа конечных приращений имеем

$$\varphi(1)-\varphi(0)=\varphi'(t) \qquad (0<t<1).$$

Поэтому

$$f(x_2)-f(x_1)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\Bigg|_{x=x(t)}\cdot\Delta x_k \qquad (0<t<1).$$

Мы предположили, что точки вида $x=x(t)$ принадлежат области определения функции $f(x)$. В связи с этим введем следующее определение: множество A называется выпуклым, если вместе с любыми двумя точками $x_1, x_2 \in A$ этому множеству принадлежат все точки вида $x(t)=x_1+t(x_2-x_1)$, где $0\le t\le 1$. Примером открытого выпуклого множества является ε - окрестность точки a. Действительно, пусть множество A состоит из точек x, для которых удовлетворяется неравенство $|x-a|<\varepsilon$ и пусть x_1, x_2 - две точки этого множества. Положим $x(t)=x_1+t(x_2-x_1)$ $(0\le t\le 1)$.

Тогда $x(t)-a=(1-t)(x_1-a)+t(x_2-a)$,

откуда

$$|x(t)-a|\le(1-t)|x_1-a|+t|x_2-a|<(1-t)\varepsilon+t\varepsilon=\varepsilon.$$

Таким образом, все точки $x(t)$ принадлежат ε - окрестности точки a, что и требовалось доказать. Аналогично можно показать, что замкнутая ε - окрестность точки a, т.е. множество точек, для которых удовлетворяется неравенство $|x-a|\le\varepsilon$, , является выпуклым замкнутым множеством.

Итак, если функция $f(x)$ дифференцируема на выпуклом множестве A, то для нее справедлива формула Лагранжа конечных приращений:

$$f(x_2)-f(x_1)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\Bigg|_{x=x(t)}\cdot\Delta x_k$$

$$(x(t)=x_1+t(x_2-x_1),\quad 0<t<1).$$

Так же, как и для функции одной переменной, с помощью формулы Лагранжа можно доказать, что дифференцируемая на выпуклом множестве функция $f(x)$, удовлетворяющая условиям $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}=0$, равна постоянной величине.

В заключение заметим, что формула для частных производных сложной функции справедлива при менее ограничительных предположениях, чем она была выведена. Действительно, при вычислении частной производной функции $f(\varphi(x))$ $(\varphi(x)=\varphi_1(x),\dots,\varphi_l(x))$ по переменной x_p выведена. Действительно, при вычислении частной производной функции $f(\varphi(x))$ $(\varphi(x)=\varphi_1(x),\dots,\varphi_l(x))$ по переменной x_p все переменные $(x_1,\dots,x_m)$, кроме x_p, следует считать постоянными и поэтому для существования частной производной $\frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial x_p}$ достаточно потребовать дифференцируемости функций $\varphi_1(x),\dots,\varphi_l(x)$ относительно переменной x_p при фиксированных значениях других переменных $(x_1,\dots,x_m)$, а также дифференцируемости функции $f(t)=f(t_1,\dots,t_l)$ относительно тех переменных, для которых функции $t_1=\varphi_1(x)$, $t_2=\varphi_2(x),\dots,t_l=\varphi_l(x)$, действительно, зависят от x_p. Эти требования будут, в частности, выполнены, если в рассматриваемой точке потребовать существования частных производных $\frac{\partial\varphi_k(x)}{\partial x_p}$ и непрерывности тех частных производных $\frac{\partial f}{\partial t_k}$, для которых функции $t_k=\varphi_k(x)$ зависят от x_p.

§ 6. Производные и дифференциалы высших порядков для функции одной переменной

Производная от функции одной переменной $y=f(x)$ есть некоторая функция переменной x. Поэтому можно попытаться найти производную от нее. Полученная функция (если она существует) называется второй производной от функции $f(x)$. Аналогично по индукции можно ввести производные более высоких порядков. Обозначение:

$$f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'\ .$$

Для некоторых элементарных функций легко получить общие формулы для производных порядка n. Например, по индукции легко найти, что

$$(x^{\alpha})^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\,x^{\alpha-n}\ ,$$

$$(a^{x})^{(n)}=a^{x}(\ln a)^{n}\qquad((e^{x})^{(n)}=e^{x}),$$

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right),$$

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right).$$

Укажем простую физическую интерпретацию производных. Пусть $y=f(x)$ – путь, пройденный материальной точкой за время x. Тогда величина $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, очевидно, является средней скоростью точки за время от x_0 до x. Предел этой скорости при $x\to x_0$, т.е. $f'(x_0)$, естественно назвать мгновенной скоростью точки в момент времени x_0. Точно таким же образом убедимся в том, что производная $f''(x_0)$ – мгновенное ускорение точки в момент времени x_0.

Упомянем следующие формулы, вытекающие из определения высших производных:

$$[c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]^{(n)} = c_1 f_1^{(n)}(x) + c_2 f_2^{(n)}(x)$$

(c_1 , c_2 - произвольные постоянные);

$$[u(x)\cdot v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}(x)\, v^{(n-k)}(x)$$

(C_n^k - биномиальные коэффициенты, $u^{(0)}(x) = u(x)$).

В пояснении нуждается лишь последняя формула, которая называется формулой Лейбница. Эта формула доказывается по индукции. При $n = 1$ формула была выведена ранее. Предположим ее справедливость при заданном значении n и докажем, что она останется справедливой и при замене n на $n+1$. Итак, пусть

$$[u(x)\cdot v(x)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}(x)\cdot v^{(n-k)}(x) .$$

Тогда

$$[u(x)\cdot v(x)]^{(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left[u^{(k)}(x)\cdot v^{(n-k)}(x)\right]' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)}(x)\cdot v^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k+1)}(x)\cdot v^{(n-k)}(x) .$$

Заменим во второй сумме индекс суммирования k на $k-1$:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k+1)}(x)\cdot v^{(n-k)}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} C_n^{k-1} u^{(k)}(x)\cdot v^{(n+1-k)}(x).$$

Отсюда

$$[u(x)\cdot v(x)]^{(n+1)} = u(x)\cdot v^{(n+1)}(x) + u^{(n+1)}(x)\cdot v(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\left[C_n^k + C_n^{k-1}\right] u^{(k)}(x)\cdot v^{(n+1-k)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(k)}(x)\cdot v^{(n+1-k)}(x),$$

так как $C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1$, а при $1 \le k \le n$ $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$. Формула Лейбница доказана.

Мы рассмотрели понятие производных порядка выше первого. Введем понятие дифференциалов высших порядков. Дифференциал $dy = df(x) = f'(x)dx$ при фиксированном значении dx является функцией переменной x. Дифференциал от этой функции будем называть дифференциалом второго порядка и обозначать через $d^2y = d^2f(x)$. Если $y = f(x)$, то

$$dy = f'(x)dx, \quad d^2y = d(dy) = d[f'(x)dx] = d[f'(x)]dx = f''(x)(dx)^2.$$

По индукции аналогичным образом можно определить и дифференциалы более высокого порядка:

$$d^n y = d[d^{n-1}y] = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

В связи с этим равенством можно писать вместо $f^{(n)}(x)$ выражение $\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

Для дифференциалов высших порядков нет той инвариантности формы записи, которая есть у дифференциала первого порядка, например

$$d^2 f[\varphi(x)] \ne [f(\varphi(x))]''[d\varphi(x)]^2.$$

§ 7. Частные производные и дифференциалы высших порядков для функции нескольких переменных. Независимость от порядка дифференцирования

Частные производные $\frac{\partial f(x)}{\partial x_\ell}$ $(x=(x_1 \dots x_m))$ являются некоторыми функциями переменных $(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Поэтому можно говорить о частных производных этих функций. В результате мы получим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_\ell} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_\ell} \right).$$

Аналогично определяются частные производные более высокого порядка. Оказывается, что при довольно общих требованиях, наложенных на функцию $f(x)$, частные производные $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_k \partial x_\ell}$ и $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_\ell \partial x_k}$ совпадают. Рассмотрим сначала функции двух переменных.

Теорема. Пусть функция $z=f(x,y)$ имеет в окрестности точки (x_0, y_0) частные производные $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \cdot \partial y}$, $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \cdot \partial x}$ и эти производные непрерывны в точке (x_0, y_0). Тогда $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\, \partial x}$ при $x=x_0$, $y=y_0$.

Доказательство. Рассмотрим квадрат $x_0 \le x \le x_0+h$, $y_0 \le y \le y_0+h$. При достаточном малом h он будет находиться внутри окрестности, в которой существуют производные $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\, \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\, \partial x}$, а, следовательно, существуют производные $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ (для точек квадрата выполнено неравенство $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} \le h\sqrt{2}$

Положим

$$\varphi(x) = f(x, y_0+h) - f(x, y_0),$$

$$\psi(y) = f(x_0+h, y) - f(x_0, y).$$

Легко проверить, что

$$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = \psi(y_0+h) - \psi(y_0).$$

Действительно,

$$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+h) + f(x_0, y_0),$$

$$\psi(y_0+h) - \psi(y_0) = f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0, y_0+h) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0).$$

Воспользуемся формулой Лагранжа:

$$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = \varphi'(C_1)h, \quad C_1 \in (x_0, x_0+h);$$

$$\psi(y_0+h) - \psi(y_0) = \psi'(C_2)h, \quad C_2 \in (y_0, y_0+h).$$

Но

$$\varphi'(C_1) = \frac{\partial f(C_1, y_0+h)}{\partial x} - \frac{\partial f(C_1, y_0)}{\partial x},$$

$$\psi'(C_2) = \frac{\partial f(x_0+h, C_2)}{\partial y} - \frac{\partial f(x_0, C_2)}{\partial y}.$$

Преобразуем выражения для $\varphi'(C_1)$ и $\psi'(C_2)$ с помощью формулы Лагранжа:

$$\varphi'(C_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(C_1, \tilde{C}_2)\cdot h \quad \text{где} \quad \tilde{C}_2 \in (y_0, y_0+h);$$

$$\psi'(C_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\tilde{C}_1, C_2)\cdot h \quad \text{где} \quad \tilde{C}_1 \in (x_0, x_0+h).$$

Поэтому

$$\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)=\frac{\partial^2 f(c_1,\tilde{c}_2)}{\partial y\cdot\partial x}\cdot h^2,$$

$$\psi(y_0+h)-\psi(y_0)=\frac{\partial^2 f(\tilde{c}_1,c_2)}{\partial x\cdot\partial y}\cdot h^2.$$

Отсюда $\dfrac{\partial^2 f(c_1,\tilde{c}_2)}{\partial y\cdot\partial x}=\dfrac{\partial^2 f(\tilde{c}_1,c_2)}{\partial x\cdot\partial y}$. Перейдем в этом равенстве к пределу при $h\to 0$. Так как при $h\to 0$ имеем $c_1\to x_0$, $\tilde{c}_1\to x_0$, $c_2\to y_0$, $\tilde{c}_2\to y_0$, то в пределе получим соотношение

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x,\partial y},$$

что и требовалось доказать.

Имеет место и более общая теорема для функции от нескольких переменных.

Теорема. Если все частные производные порядка n функции $f(x)$ существуют в окрестности точки x_0 и непрерывны в этой точке, то в любой из них при $x=x_0$ можно переставить порядки дифференцирования, не меняя результата.

Доказательство теоремы в общем случае громоздко и проводится по индукции. На каждом этапе рассуждений меняются порядки дифференцирования по двум переменным на основании доказанной выше теоремы. Ограничимся примером.

Покажем, что

$$\frac{\partial^4 f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_3\,\partial x_1\cdot\partial x_3\cdot\partial x_2}=\frac{\partial^4 f(x_1,x_2,x_3,x_4)}{\partial x_1\cdot\partial x_2\cdot\partial x_3^2}.$$

Имеем:

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x_3\,\partial x_1\,\partial x_3\,\partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_3\,\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_3\,\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_3\,\partial x_1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_3}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_1\,\partial x_3}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\,\partial x_3}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_3\,\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial^2}{\partial x_2\,\partial x_3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_3}\right)\right] = \frac{\partial^4 f}{\partial x_1\,\partial x_2\,\partial x_3^2} .$$

Рассмотрим теперь понятие дифференциалов высших порядков для функции нескольких переменных.

Дифференциалы высших порядков определяются по индукции. Пусть дифференциал $df(x)$ соответствует дифференциалам dx_k (k = 1,2, ... m) независимых переменных. При фиксированных значениях dx_k дифференциал $df(x)$ является функцией переменных (x_1 , x_2 , ... x_m) и поэтому можно говорить о дифференциале второго порядка:

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\, dx_k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} d\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right) dx_k = \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_\ell\,\partial x_k}\, dx_\ell \cdot dx_k .$$

Аналогично можно определить и дифференциалы более высокого порядка. При этом

$$d^n f(x) = \sum_{k_1, k_2 \ldots k_n} \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_{k_1}\,\partial x_{k_2} \ldots \partial x_{k_n}} \cdot dx_{k_1} \cdot dx_{k_2} \ldots dx_{k_n} .$$

В этой сумме каждый из индексов k_i пробегает значения от 1 до m . Так как при вычислении производных можно менять порядки дифференцирования, то сумма содержит много одинаковых членов.

§ 8. Формула Тейлора

Если функция $f(x)$ одной переменной дифференцируема в точке $x=a$, то в окрестности этой точки имеет место представление:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+o(x-a) \qquad (x\to a).$$

Сделаем дальнейшее уточнение этого представления, разлагая $f(x)$ по степеням $(x-a)$ и ограничиваясь в этом разложении степенями не выше n. Чтобы выяснить вид предполагаемого разложения, рассмотрим сначала случай, когда функция $f(x)$ является полиномом степени n, т.е.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k \qquad (\alpha_k \text{ - постоянные}) .$$

Для разложения этого полинома по степеням $(x-a)$ достаточно разложить каждую функцию x^k по степеням $(x-a)$:

$$x^k=[(x-a)+a]^k=\sum_{p=0}^{k} C_k^p\,(x-a)^p\cdot a^{k-p} .$$

Приводя подобные члены в выражении для полинома $f(x)$ получим:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \beta_k (x-a)^k .$$

Коэффициенты β_k легко выразить через производные $f^k(x)$, если воспользоваться соотношением:

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left[(x-a)^k\right]\Bigg|_{x=a} = \begin{cases} 0 & \text{при } k\neq \ell ,\\ \ell! & \text{при } k=\ell . \end{cases}$$

В результате получаем: $f^{(\ell)}(a)=\beta_\ell\,\ell!$ $(\ell=0,1,\ldots,n)$, откуда $\beta_\ell=\frac{f^{(\ell)}(a)}{\ell!}$. Таким образом, разложение произвольного полинома $f(x)$ степени n по степеням $(x-a)$ можно представить в виде:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad \left(f^{(0)}(x)=f(x), \quad (x-a)^0=1\right) .$$

Если функция $f(x)$ не является полиномом степени n, то

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+R_n(x) ,$$

где функция $R_n(x)$ не равна тождественно нулю. Это представление произвольной функции $f(x)$ называется формулой Тейлора, а функция $R_n(x)$ называется остаточным членом формулы Тейлора (при $a=0$ формулу Тейлора иногда называют формулой Маклорена). Так как функция $R_n(x)$ ничуть не проще исходной функции $f(x)$, то представление функции $f(x)$ в окрестности точки $x=a$ по формуле Тейлора будет оправдано лишь в том случае, когда остаточным членом $R_n(x)$ можно пренебречь при достаточно малых значениях $(x-a)$. Покажем, что это имеет место, если в окрестности точки a функция $f(x)$ имеет производную порядка $n+1$.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ имеет производную порядка $n+1$ в окрестности точки a. Тогда в этой окрестности для остаточного члена $R_n(x)$ в формуле Тейлора справедливо представление:

$$R_n(x)=\frac{(x-c)^{n-p+1}}{n!\,p}(x-a)^p f^{(n+1)}(c),$$

где $p>0$, а $c\in(a,x)$.

Доказательство. Получим оценку остаточного члена $R_n(x)$ формулы Тейлора в фиксированной точке $x=x_0$, принадлежащей окрестности точки a, в которой функция $f(x)$ имеет производную порядка $n+1$. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\Phi(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x_0-x)^k+\left(\frac{x_0-x}{x_0-a}\right)^p\cdot R_n(x_0),$$

где $R_n(x_0)$ - остаточный член формулы Тейлора, $p>0$. Функция $\Phi(x)$ подобрана таким образом, чтобы имело место равенство $\Phi(a)=f(x_0)$, $\Phi(x_0)=f(x_0)$, т.е. $\Phi(a)=\Phi(x_0)$. Действительно,

$$\Phi(a)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x_0-a)^k+R_n(x_0)=f(x_0),$$

$$\Phi(x_0)=f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$$

(мы воспользовались равенствами $(x_0-x)^k\big|_{x=x_0}=0$ при

$k = 0 \qquad (x_0 - x)^0 = 1, \quad f^{(0)}(x) = f(x)).$

Легко проверить, что для функции $\Phi(x)$ на сегменте $[a, x_0]$ выполнены условия теоремы Ролля. Действительно, функция $\Phi(x)$ непрерывна на сегменте $[a, x_0]$, имеет производную на интервале (a, x_0) и $\Phi(a) = \Phi(x_0)$. Поэтому существует такая точка c, в которой $\Phi'(c) = 0$. Но

$$\Phi'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(x_0 - x)^k -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(x_0 - x)^{k-1} - p\left(\frac{x_0 - x}{x - a}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{(x_0 - a)} R_n(x).$$

Заменим во второй сумме индекс суммирования k на $k + 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(x_0 - x)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(x_0 - x)^k.$$

Отсюда

$$\Phi'(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x_0 - x)^n - p\left(\frac{x_0 - x}{x_0 - a}\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{(x_0 - a)} R_n(x).$$

Из равенства $\Phi'(c) = 0 \quad (c \in (a, x_0))$ вытекает, что

$$R_n(x_0) = \frac{(x_0 - c)^{n-p+1}}{n!\,p}(x_0 - a)^p f^{(n+1)}(c).$$

Теорема доказана.

Если в представлении остаточного члена положим $p = 1$, то получим представление остаточного члена $R_n(x)$ в форме Коши:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n(x-a)}{n!} \qquad (c\in(a,x)).$$

Если положим $p=n+1$, то получаем представление остаточного члена в форме Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad (c\in(a,x)).$$

Получим теперь оценку остаточного члена $R_n(x)$ формулы Тейлора при меньших ограничениях, чем ранее: предположим, что функция $f(x)$ имеет в точке $x=a$ непрерывную производную порядка n. Напишем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, заменив n на $n-1$:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \quad (c\in(a,x)).$$

Так как функция $f^{(n)}(x)$ непрерывна в точке $x=a$, то $\lim\limits_{x\to a}f^{(n)}(c)=f^{(n)}(a)$, т.е. $f^{(n)}(c)=f^{(n)}(a)+o(1)\ (x\to a)$.

Отсюда $$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o[(x-a)^n] \quad (x\to a).$$

Мы воспользовались соотношением $(x-a)^n\cdot o(1)=o[(x-a)^n](x\to a)$.

Замечание. Если функция $f(x)$ четная (нечетная), т.е.

$$f(-x)=f(x) \qquad (f(-x)=-f(x)),$$

то ее производная будет нечетной (четной) функцией, так как

$$f'(-x) = -f'(x) \qquad (f'(-x) = f'(x)) .$$

Поэтому формула Тейлора при $a = 0$ для четной (нечетной) функции содержит лишь четные (нечетные) степени x, в силу того, что нечетные функции равны нулю при $x = 0$.

Пример. Из равенства

$$1+x^2+\ldots+x^{2m} = \frac{1-x^{2m+2}}{1-x^2}$$

вытекает

$$\frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+\ldots+x^{2m}+o(x^{2m}) \qquad (x \to 0) .$$

Мы получили формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа можно записать в довольно симметричной форме с помощью дифференциалов функции $f(x)$, соответствующих заданному значению dx дифференциала независимой переменной: пусть $\Delta f(x) = f(x)-f(a)$, $dx = x-a$.

Тогда

$$\Delta f(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{d^{(k)}f(a)}{k!} + \frac{d^{n+1}f(c)}{(n+1)!} .$$

Рассмотрим обобщение формулы Тейлора для функций нескольких переменных. Пусть функция $y = f(x)$ $(x = (x_1, \ldots, x_m))$ задана на выпуклом множестве A и имеет на этом множестве непрерывные частные производные порядка $n+1$. Пусть, далее, точки x_0 и x принадлежат множеству A. Тогда этому же множеству будут принадлежать также точки $x(t) = x_0 + t(x-x_0)$, где $0 \le t \le 1$. Рассмотрим функцию переменной t:

$$\varphi(t) = f[x(t)] .$$

По правилу дифференцирования сложной функции находим:

$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f[x(t)]}{\partial x_i} \Delta x_i \qquad (\Delta x_i = x_i - x_{0,i}) ,$$

$$\varphi''(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f[x(t)]}{\partial x_i \, \partial x_j} \Delta x_i \, \Delta x_j ,$$

. . . .

$$\varphi^{(k)}(t)=\sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\dots\sum_{i_k=1}^{m}\frac{\partial^k f[x(t)]}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\dots\partial x_{i_k}}\Delta x_{i_1}\Delta x_{i_2}\dots\Delta x_{i_k}\ .$$

Так как функция $f(x)$ в окрестности рассматриваемой точки x имеет непрерывные частные производные порядка $n+1$, то функция $\varphi(t)$ в окрестности точки $t=0$ имеет непрерывные производные порядка $n+1$. Применим к функции $\varphi(t)$ формулу Тейлора-Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$\varphi(1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}+\frac{\varphi^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}\ ,$$

где $0<t<1$.

В результате получим:

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\Big[\sum_{i_1=1}^{m}\dots\sum_{i_k=1}^{m}\frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}\Delta x_{i_1}\dots\Delta x_{i_k}\Big]+R_n(x)\ ,$$

где

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{i_1=1}^{m}\dots\sum_{i_{n+1}=1}^{m}\frac{\partial^{n+1}f[x(t)]}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_{n+1}}}\Delta x_{i_1}\dots\Delta x_{i_{n+1}}\ ,$$

$$x(t)=x_0+t(x-x_0)\ ,\qquad 0<t<1\ .$$

Другая запись формулы Тейлора : пусть

$$\Delta f(x)=f(x)-f(x_0)\ ,\qquad \Delta x=x-x_0\ .$$

Тогда

$$\Delta f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{d^k f(x_0)}{k!}+\frac{d^{n+1}f[x(t)]}{(n+1)!}\ ,$$

где $x(t) = x_0 + t(x - x_0)$, $0 < t < 1$.

Из формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа заменой n на $n-1$, тем же методом, что и для функции одной переменной, можно получить формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left[\sum_{i_1=1}^{m} \ldots \sum_{i_k=1}^{m} \frac{\partial^k f(x_0)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}} \Delta x_{i_1} \ldots \Delta x_{i_k} \right] + R_n(x),$$

где $R_n(x) = o(|\Delta x|^n)$.

Приведем формулу Тейлора при $n = 2$:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \Delta x_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j + R_n .$$

§ 9. Ряды Тейлора

Пусть в формуле Тейлора для функции одной переменной $n \to \infty$ и $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$.
Тогда мы получаем так называемый ряд Тейлора $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$.

Очевидно, что требование $\lim\limits_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ обеспечивает сходимость ряда Тейлора и равенство его функции $f(x)$. В то же время требование сходимости ряда Тейлора не всегда влечет за собой равенство этого ряда функции $f(x)$.

Пример.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0. \end{cases}$$

Рассмотрим ряд Тейлора для этой функции.

Имеем $f'(x)=-\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f''(x)=\frac{6}{x^4}e^{-\frac{1}{x^2}}+$

$$+\frac{4}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}, \ldots, f^{(k)}(x)=P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},$$

где $P_k(x)$ - некоторый полином.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^k}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$ при любом значении k, то

$f^{(k)}(0)=0$ и ряд Тейлора сходится к нулю при любых x. Очевидно, его сумма не совпадает с функцией $f(x)$.

Мы рассмотрим ряды Тейлора для некоторых элементарных функций и установим область значений x, при которых он сходится и его сумма равна $f(x)$. Предварительно рассмотрим некоторые соображения об области сходимости ряда Тейлора. Этот ряд является степенным рядом, т.е. рядом вида:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k .$$

Найдем область сходимости любого степенного ряда с помощью признака Коши.

По этому признаку ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$

сходится, если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k(x-a)^k|}<1$, и

расходится, если $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\sqrt[k]{|a_k(x-a)^k|}>1$. Если положить $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}}$,

то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$, тем самым, сходится при $|x-a| < R$ и расходится при $|x-a| > R$.

Величина R в связи с этим называется радиусом сходимости степенного ряда. Если $|x-a| = R$, то степенной ряд может как сходиться, так и расходиться. Отметим следующее свойство степенного ряда: если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$

сходится при $x = x_0$, то он сходится и при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству: $|x-a| < |x_0 - a|$. Действительно, если это неравенство выполнено, то $|x-a| < R$, так как $|x_0 - a| \le R$. Если существует предел

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = A ,$$

то с помощью признака Даламбера легко убедиться в том, что ряд сходится при $|x-a| < \frac{1}{A}$ и расходится при $|x-a| > \frac{1}{A}$ т.е. $R = \frac{1}{A}$.

Рассмотрим ряды Тейлора при $a = 0$ для некоторых простейших элементарных функций:

I. Пусть $f(x) = (1+x)^{\alpha}$. Так как $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)$, то ряд Тейлора имеет вид $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ при

$$a_k = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 1$, то $R = 1$.

Для оценки остаточного члена формулы Тейлора при $|x| < 1$ воспользуемся представлением его в форме Коши:

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)}{n!}(1+c)^{\alpha-1}\cdot x\cdot\left(\frac{x-c}{1+c}\right)^n \quad (c\in(0,x)).$$

Покажем, что при $|x| < 1$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{x-c}{1+c}\right| \le |x| .$$

Действительно,

$$\left|\frac{x-c}{1+c}\right| = \frac{|x|-|c|}{|1+c|} \le \frac{|x|-|c|}{1-|c|} \le |x| .$$

Мы воспользовались тем, что числа x и c имеют одинаковые знаки причем $|c| < |x|$. Так как, кроме того

$$|(1+c)^{\alpha-1}x| \le \max\left[(1+x)^{\alpha-1}, 1\right],$$

то для $R_n(x)$ получаем следующую оценку:

$$|R_n(x)| \le \max\left[(1+x)^{\alpha-1}, 1\right]\cdot|x|^n\cdot(n+1)|a_{n+1}| .$$

При $|x| < 1$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)|a_{k+1}|\cdot|x|^k$ сходится по признаку Даламбера, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)|a_{n+1}\, x^n| = 0$. Поэтому и $R_n \to 0$ при $n\to\infty$, т.е. при $|x| < 1$ справедливо разложение в ряд Тейлора:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k .$$

2. Пусть $f(x) = \ln(1+x)$. Тогда

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

при $k \geq 1$.

Исследование формулы Тейлора и ряда Тейлора проводится так же, как и для функции $f(x)=(1+x)^\alpha$. В результате получаем

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k \qquad \text{при } |x|<1$$

3. Пусть $f(x)=e^x$. Тогда $f^{(k)}(x)=e^x$.

Ряд Тейлора

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^{(k)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

сходится (по признаку Даламбера) при любых значениях x .

Для оценки остаточного члена в формуле Тейлора воспользуемся его записью в форме Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^c \quad \text{, где } c\in(0,x).$$

Отсюда

$$\left|R_n(x)\right|\leq A(x)\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $A=max(1,e^x)$.

В силу сходимости (по признаку Даламбера) ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}A(x)\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad \text{при любых значениях } x$$

получим, что $R_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$, т.е.

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

4. Для функций $f(x)=\sin x$ и $f(x)=\cos x$ исследование проводится так же, как и для функции e^x. При оценке $R_n(x)$ следует воспользоваться неравенствами $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$. В результате при любых значениях x получаем:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}.$$

§10. Комплекснозначные и вектор-функции

Пусть заданы две функции $u(x)$ и $v(x)$ на числовом множестве A Тогда каждому значению $x \in A$ можно поставить в соответствие комплексное число $y=u(x)+iv(x)$. В таком случае говорят, что задана комплекснозначная функция

$$y=f(x)=u(x)+iv(x).$$

Функция $u(x)$ называется действительной частью функции $f(x)$, а функция $v(x)$ мнимой частью. С помощью понятия модуля комплексного числа легко обобщить ранее введенные понятия предела функции, непрерывности функции на комплекснозначные функции. При этом сохраняются все свойства понятий предела функции и непрерывности функции за исключением теорем сравнения для предела функции и теоремы о достижении промежуточных значений для функций, непрерывных на сегменте, так как мы не ввели операцию сравнения для комплексных чисел. Так же легко обобщаются основные понятия дифференциального исчисления с сохранением всех свойств этих понятий за исключением теорем о среднем значении. Для дифференцируемости комплекснозначной функции, как нетрудно показать, необходимо и достаточно, чтобы действительная и мнимая часть комплекснозначной функции обладала этим свойством.

Отметим, что из определения понятия предела функции производной для комплекснозначных функций $f(x) = u(x) + iv(x)$ вытекают равенства:

1) если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c = a + ib$, то $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = b$;

2) $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$.

Рассмотрим примеры комплекснозначных функций. Пусть c – действительное число. В таком случае функция $f(x) = e^{cx}$ удовлетворяет равенствам $f'(x) = cf(x)$, $f(0) = 1$. Покажем, что в случае, когда c – комплексное число $(c = a + ib)$, то такими же свойствами обладает функция

$$f(x) = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) .$$

Действительно, $f(0) = 1$, $f'(x) =$

$$= af(x) + ibe^{ax}(i\sin bx + \cos bx) = cf(x) .$$

Функцию $f(x) = e^{ax}(\cos bx + i\sin bx)$, в связи с этим, естественно обозначать через e^{cx} , где

$c = a + ib$. Отметим, что функция e^{cx} обладает свойством, характерным для показательной функции:

$$e^{c_1x_1 + c_2x_2} = e^{c_1x_1} \cdot e^{c_2x_2} .$$

Равенство $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ можно получить, подставляя формально ряды Тейлора для функций e^{ix}, $\cos x$, $\sin x$:

$$e^{ix} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} =$$

$$= \cos x + i\sin x.$$

Рассмотрим теперь с помощью понятия вектора и матрицы понятие вектор-функции и матрицы-функции. Пусть нам заданы на числовом множестве A m функций $u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)$.

В таком случае говорят, что нам задана вектор-функция $u(x) = (u_1(x),\ u_2(x), \dots,\ u_m(x))$. Аналогично определяется матрица-функция $u(x)$, как матрица с элементами $u_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2, \dots, m)$:

С помощью понятия модуля вектора обычным образом вводится понятие предела вектор-функции, непрерывности вектор-функции и основные понятия дифференциального исчисления для вектор-функций. При этом имеют место следующие равенства:

1) если $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_m(x))$

и $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = b = (b_1, \ldots, b_m)$,

то $\lim\limits_{x \to x_0} u_k(x) = b_k \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$,

2) $u'(x) = (u_1'(x), \ldots, u_m'(x))$.

Для дифференцируемости вектор-функции, как нетрудно показать, необходимо и достаточно, чтобы компоненты вектор-функции обладали этим свойством, причем для вектор-функции сохраняются рассмотренные ранее свойства непрерывности, производной и дифференциала за исключением теорем, связанных с делением, теоремы о промежуточном значении функции, непрерывной на сегменте $[a, b]$, и теорем о среднем значении, так как операции деления и сравнения для векторов не были определены. Все указанные свойства справедливы и для матриц-функций.

§11. Неопределенный интеграл

Пусть нам задана некоторая дифференцируемая функция $f(x)$. Ранее мы рассмотрели процедуру вычисления по этой функции производной $f'(x)$. Рассмотрим теперь обратную задачу: известна функция $f(x)$, являющаяся производной некоторой функции

$F(x)$, т.е. $F'(x)=f(x)$. Требуется восстановить по функции $f(x)$ функцию $F(x)$. Функция $F(x)$ называется первообразной функцией (или просто первообразной) для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если в любой точке этого интервала функция $F(x)$ дифференцируема, причем $F'(x)=f(x)$. Вместо интервала (a,b) можно рассматривать сегмент, полуинтервал.

Пример. Функция $F(x)=(2x+1)^2$ является при $x\in(-\infty,\infty)$ первообразной для функции $f(x)=4\cdot(2x+1)$, функция $F(x)=\arcsin x$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $(-1,1)$.

Рассмотрим вопрос об единственности первообразных функций. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ являются первообразными для функции $f(x)$ на интервале (a,b). Тогда на этом интервале

$$F_1'(x)=f(x) \qquad и \qquad F_2'(x)=f(x),$$

т.е. $[F_2(x)-F_1(x)]'=F_2'(x)-F_1'(x)=0$.

Поэтому функция $F(x)=F_2(x)-F_1(x)$ является постоянной на интервале (a,b): $F(x)=c$, т.е. $F_2(x)=F_1(x)+c$.
С другой стороны, если c – произвольная постоянная, а $F_1(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то, как легко проверить, функция $F_1(x)+c$ также является первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b). Таким образом, все множество первообразных для функции $f(x)$ на интервале (a,b) содержится среди

функций вида $F_1(x)+c$, где c - произвольная постоянная. Множество всех первообразных для функций $f(x)$ называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается через $\int f(x)\,dx$. Знак $\int$ называется знаком интеграла, выражение $f(x)\,dx$ - подинтегральным выражением, а сама функция $f(x)$ - подинтегральной функцией.

Мы будем писать $\int f_1(x)dx = \int f_2(x)\,dx$, если любые соответствующие первообразные отличаются на постоянную величину: $F_2(x) = F_1(x)+c$. Вопрос о существовании первообразных мы рассмотрим позднее, отметим лишь, что первообразная для функции $f(x)$ существует, если $f(x)$ - непрерывная функция.

Отметим следующие очевидные свойства неопределенного интеграла:

I) $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)\,dx$

2) $\int dF(x) = F(x)+c$

3) $\int [c_1 f_1(x)+c_2 f_2(x)]dx = c_1\int f_1(x)\,dx + c_2\int f_2(x)\,dx$.

В частности $\int cf(x)dx = c\int f(x)\,dx$.

Эти свойства вытекают из соответствующих свойств производной и определения неопределенного интеграла.

Приведем таблицу основных неопределенных интегралов от простейших элементарных функций. Произвольную постоянную в неопределенных интегралах будем опускать.

$$1)\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1), \qquad 2)\int \frac{dx}{x} = \ln|x| \quad (x \neq 0),$$

$3)\ \int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a}$, $\quad 4)\ \int \sin x\, dx = -\cos x$,

$5)\ \int \cos x\, dx = \sin x$, $\quad 6)\ \int \frac{dx}{\cos^{2}x} = \operatorname{tg} x$,

$7)\ \int \frac{dx}{\sin^{2}x} = -\operatorname{ctg} x$, $\quad 8)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} = \begin{cases} \arcsin x \\ -\arccos x \end{cases}, \ (-1<x<1)$

$9)\ \int \frac{dx}{1+x^{2}} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x \\ -\operatorname{arctg} x \end{cases}$, $\quad 10)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^{2}\pm 1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^{2}\pm 1}\right|$,

$11)\ \int \frac{dx}{1-x^{2}} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$, $\quad 12)\ \int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x$,

$13)\ \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x$, $\quad 14)\ \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{2}x} = \operatorname{th} x$,

$15)\ \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{2}x} = \operatorname{cth} x \quad (x \neq 0)$.

Интеграл от элементарной функции не всегда является элементарной функцией; например, доказано, что $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$ не является элементарной функцией.

Глава 5. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим некоторые применения дифференциального исчисления для выяснения различных характеристик функций.

§ I. Раскрытие неопределенности

С помощью теорем о среднем значении и формулы Тейлора для функции одной переменной можно автоматизировать процесс вычисления многих пределов, приводящих при грубом применении обычных правил к неопределенностям вида $0/0$, ∞/∞, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞.

Рассмотрим сначала неопределенность вида $\frac{0}{0}$: требуется вычислить

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}, \qquad \text{причем } \lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=0$$

и $\varphi(x)\neq 0$ в окрестности точки a. Разложим функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ по формуле Тейлора. Пусть $f(x)=\alpha(x-a)^p+$ $+o[(x-a)^p]$, $\varphi(x)=\beta(x-a)^q+o[(x-a)^q]$ $(x\to a)$, где $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, а p и q – целые неотрицательные числа.
Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x-a)^p[1+o(1)]}{\beta(x-a)^q[1+o(1)]}=\frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to a}(x-a)^{p-q}=$$

$$=\begin{cases}0 & p>q\\ \alpha/\beta & p=q\\ \infty & p<q\end{cases}.$$

При этом мы предположили, что функция $f(x)$ и $\varphi(x)$

имеют производные нужного порядка при $x=a$. Если же не предполагать существования производных при $x=a$, то для раскрытия неопределенности очень удобны так называемые правила Лопиталя. Сформулируем эти правила сначала для неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и имеют первые производные в окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a. Если функции $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ не равны нулю в указанной окрестности,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\varphi(x) = 0$$

и существует предел

$$A = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

то существует также равный ему предел $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

Доказательство. Положим $f(a)=\varphi(a)=0$. Тогда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ будут непрерывны в некоторой точке a, включая саму точку a. Применим теорему Коши о среднем значении:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \qquad (c\in(a,x)).$$

Так как $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$,

то при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при $|x-a| < \delta$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} - A\right| < \varepsilon$.

Пусть теперь $|x-a| < \delta$. Тогда $|c-a| \leq |x-a| < \delta$, так как $c \in (a, x)$, и, следовательно,

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)} - A\right| = \left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - A\right| < \varepsilon ,$$

т.е. существует предел $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = A$.

Теорема доказана.

Замечания к теореме

1. Утверждение теоремы остается в силе, если $A = \infty$ (или $A = +\infty$, $A = -\infty$). Действительно, если, например, $A = +\infty$, то при любом $C > 0$ найдется такое число $\delta > 0$ что $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)} > C$ при $|x-a| < \delta$.

Отсюда

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} > C$$ при $|x-a| < \delta$, так как $|c-a| \leq |x-a| < \delta$.

2. В формулировке теоремы можно заменить пределы на односторонние пределы, если вместо окрестности точки a рассмотреть правые или левые окрестности (без самой точки a), т.е. интервалы $(a, a+\delta)$ или $(a-\delta, a)$.

3. Утверждение теоремы остается в силе, если $a = \infty$ (или $a = -\infty$, $a = +\infty$). Действительно, пусть, например, $a = \infty$. Положим $t = \frac{1}{x}$, $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$, $\Phi(t) = \varphi\left(\frac{1}{t}\right)$.

Тогда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{\Phi(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{F'(t)}{\Phi'(t)} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f'(x)\big|_{x=\frac{1}{t}} \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\varphi'(x)\big|_{x=\frac{1}{t}} \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

4. Если $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi'(x) = 0$, то к вычислению предела $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ можно повторно применить правило Лопиталя. В результате получим $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$.

Эту процедуру можно повторить несколько раз.

Рассмотрим теперь неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Теорема. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и имеют первые производные в окрестности точки a за исключением, быть может, самой точки a. Если функции $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ не равны нулю в указанной окрестности, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$ (или $+\infty$, $-\infty$) и существует предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$, то существует равный ему предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A$.

Доказательство. По-прежнему будем использовать теорему

Коши о среднем значении: $\dfrac{f(x)-f(t)}{\varphi(x)-\varphi(t)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ $(c\in(x,t))$.

Преобразуем это соотношение. Так как

$$\frac{f(x)-f(t)}{\varphi(x)-\varphi(t)}=\frac{f(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{1-\dfrac{f(t)}{f(x)}}{1-\dfrac{\varphi(t)}{\varphi(x)}} ,$$

то $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{f'(c)}{\varphi'(c)}\cdot\psi(x,t)$, где $\psi(x,t)=\dfrac{1-\dfrac{\varphi(t)}{\varphi(x)}}{1-\dfrac{f(t)}{f(x)}}$.

Поэтому

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}-A\right|=\left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\cdot\psi(x,t)-A\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}-A\right]\cdot\psi(x,t)+A\cdot\left[\psi(x,t)-1\right]\right|\le$$

$$\le\left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}-A\right|\cdot|\psi(x,t)|+|A|\cdot|\psi(x,t)-1| .$$

Так как

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A ,$$

то при любом $\varepsilon_1>0$ найдется такое число $\delta_1>0$, что при $|x-a|<\delta_1$ выполняется неравенство: $\left|\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}-A\right|<\varepsilon_1$

Выберем значения x и t таким образом, чтобы имели место неравенства $|x-a|<|t-a|<\delta_1$. Так как $c\in(x,t)$, то в этом случае $|c-a|<\delta_1$.

Зафиксируем значение t и пусть $x \to a$. Так как

$$\lim_{x \to a} \varphi(x, t) = 1$$

при фиксированном значении t, то при любом $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, меньшее $|t - a|$, что при $|x - a| < \delta$ выполняется неравенство:

$$|\varphi(x, t) - 1| < \varepsilon_1 ,$$

откуда $|\varphi(x,t)| = |[\varphi(x,t) - 1] + 1| \leq |\varphi(x,t) - 1| + 1 < \varepsilon_1 + 1$.
Тогда при $|x - a| < \delta < |t - a| < \delta_1$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - A \right| < \varepsilon_1 (\varepsilon_1 + 1) + |A| \varepsilon_1 .$$

Если $\varepsilon > 0$ – произвольное число, то, выбирая ε_1 из условия

$$(\varepsilon_1 + 1)\varepsilon_1 + \varepsilon_1 |A| \leq \varepsilon ,$$

получим, что при $|x - a| < \delta$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - A \right| < \varepsilon , \qquad \text{т.е.} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A ,$$

что и требовалось доказать.

Все замечания к предыдущей теореме остаются справедливыми и для рассмотренной теоремы (проверить самостоятельно).

Неопределенности вида $\infty \cdot \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ сводят обычно к уже рассмотренным неопределенностям. Например, неопределенность вида $0 \cdot \infty$ т.е.

$$\lim_{x \to a} f(x)\varphi(x) \quad \text{при} \quad \lim_{x \to a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \to a} \varphi(x) = \infty$$

сводится к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{1/\varphi(x)} .$$

Неопределенность вида 1^{∞}, т.е. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$ при $f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$,

сводится к неопределенности вида $0\cdot\infty$, например, с помощью равенства $[f(x)]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x)\cdot\ln f(x)}$.

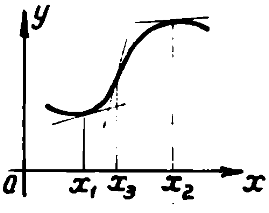
§ 2. Исследование графика функции

Применим формулу Тейлора для исследования графика функции одной переменной $y=f(x)$. Рассмотрим расположение кривой $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 относительно касательной, проходящей через точку x_0. Уравнение, связывающее значения x и y, для такой касательной было получено ранее: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Если $f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

$(f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0))$

при некотором значении x, то мы будем говорить, что кривая $y=f(x)$ проходит в данной точке x выше (ниже) касательной $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

Определение. Говорят, что кривая $y=f(x)$ обращена в точке x_0 выпуклостью кверху (книзу), если существует такая окрестность точки x_0, что для всех ее точек кривая $y=f(x)$ расположена ниже (выше) касательной к кривой в точке x_0.



Например, на рисунке: кривая $y=f(x)$ в точке x_1 обращена выпуклостью книзу, а в точке x_2 – выпуклостью кверху.

Определение. Говорят, что точка x_0 есть точка перегиба кривой $y=f(x)$, если при переходе x через значение x_0 точка кривой переходит с одной стороны касательной на другую.

Например, на рисунке точка x_3 является точкой перегиба кривой $y=f(x)$. Укажем признаки, определяющие точки выпуклости кверху (книзу) и точки перегиба.

Теорема. Пусть вторая производная функции $f(x)$ существует в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в самой точке x_0, причем $f''(x_0)>0$ $(f''(x_0)<0)$. Тогда кривая $y=f(x)$ обращена в точке x_0 выпуклостью книзу (кверху).

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора при $n=1$ с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2,$$

где $c\in(x_0,x)$. Если $f''(x_0)>0$, то в силу непрерывности функция $f''(x)$ сохраняет знак $f''(x_0)$ в некоторой окрестности точки x_0. В этой окрестности $f''(c)>0$ и, следовательно, $f(x)>f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, т.е. кривая $y=f(x)$ обращена выпуклостью книзу. Аналогично рассматривается случай $f''(x_0)<0$.

Теорема. Пусть третья производная функции $y=f(x)$ существует в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в самой точке x_0, причем $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$. Тогда точка x_0 является точкой перегиба функции $y=f(x)$.

Доказательство. По формуле Тейлора при $n=2$ с остаточным членом в форме Лагранжа имеем:

$$f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]=\frac{(x-x_0)^3}{3!}f'''(c),$$

где $C \in (x_0, x)$. Так как $f'''(x_0) \neq 0$, то в силу непрерывности функция $f'''(x)$ сохраняет знак $f'''(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. В этой окрестности сохраняет знак и $f'''(C)$, так как $C \in (x_0, x)$. Поэтому разность $f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]$ меняет знак при переходе через точку x_0, т.е. точка x_0 является точкой перегиба функции $y=f(x)$. Теорема доказана.

Сформулируем более общую теорему.

Теорема. Пусть производная $f^{(k+1)}(x)$ функции $y=f(x)$ существует в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывна в самой точке x_0, причем

$$f''(x_0)=f'''(x_0)=\ldots=f^{(k)}(x_0)=0, \quad f^{(k+1)}(x_0)\neq 0 .$$

Тогда, если k - нечетное число, то кривая $y=f(x)$ обращена в точке x_0 выпуклостью кверху (книзу) при $f^{(k+1)}(x_0)<0$ $(f^{(k+1)}(x_0)>0)$, если же k - четное число, то точка x_0 является точкой перегиба кривой $y=f(x)$. Если, кроме того, $f'(x_0)=0$, то при нечетном значении k функция $y=f(x)$ достигает в точке x_0 максимума (минимума), если

$$f^{(k+1)}(x_0)<0 \quad (f^{(k+1)}(x_0)>0).$$

Доказательство теоремы проходит аналогично доказательству предыдущих теорем и основано на формуле Тейлора:

$$f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]=\frac{f^{(k+1)}(C)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1},$$

где $C \in (x_0, x)$.

Иногда при исследовании графика функции $y=f(x)$

полезным оказывается понятие асимптоты.

Определение. Прямая $y=ax+b$ называется асимптотой кривой $y=f(x)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, если

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0 \quad (\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0).$$

Укажем необходимые и достаточные условия существования асимптоты. Пусть существует асимптота $y=ax+b$ кривой $y=f(x)$ при $x\to+\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-(ax+b)}{x}=0,$$

откуда $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Величину b при известном значении a можно найти из равенства:

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-ax].$$

Справедливо и обратное утверждение: если существуют указанные пределы a и b, то прямая $y=ax+b$ будет асимптотой кривой $y=f(x)$ при $x\to+\infty$. Аналогично формулируется и доказывается условие существования асимптоты при $x\to-\infty$.

В случае, когда

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a-0}f(x)=\infty,$$

иногда говорят, что кривая $y=f(x)$ имеет при $x=a$ вертикальную асимптоту. Мы рассмотрели ряд методов качественного исследования графиков функций. Можно рекомендовать следующую схему исследования графиков.

1. Найти область определения и область значений функции (если это возможно).

2. Найти области сохранения знака функции (если это нетрудно).

3. Найти точки разрыва и выяснить их характер.

4. Найти асимптоты.

5. Вычислить частные значения функции и грубо нарисовать график.

6. По знаку первой производной найти области возрастания и убывания функции, точки экстремума.

7. По знаку второй производной классифицировать точки экстремума и найти возможные положения точек перегиба. По третьей производной уточнить положение точек перегиба.

8. Нарисовать приблизительный график функции.

Если вычисление некоторых производных и определение их знаков затруднено, то часть пунктов при исследовании графика можно опустить.

Пример. Исследовать качественно график функции $y=\frac{x^2}{2x+3}$.

1. Область определения функции - интервалы $(-\infty, -\frac{3}{2})$. $(-\frac{3}{2}, +\infty)$, область значений - $(-\infty, \infty)$.

2. При $x < -\frac{3}{2}$ будет $y < 0$, при $x > -\frac{3}{2}$ будет $y \geq 0$.

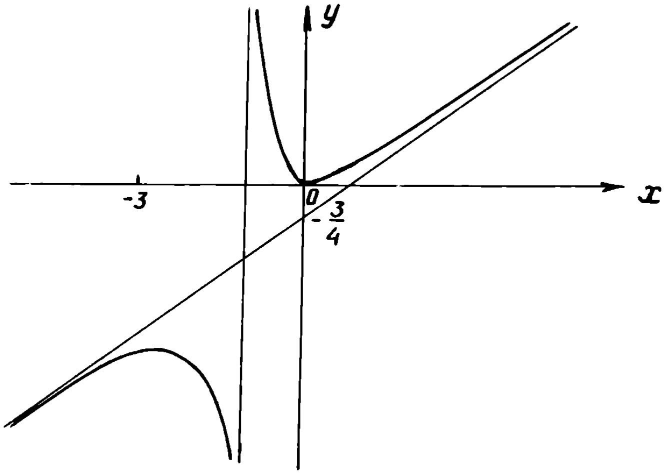
3. При $x = -\frac{3}{2}$ у функции имеется вертикальная асимптота (точка разрыва второго рода).

4. Так как $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} [y - \frac{1}{2}x] =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-(2x+3)x}{2(2x+3)} = -\frac{3}{4},$$ то

функция имеет при $x \to \pm\infty$ асимптоту $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.

5. $y' = \frac{2x(x+3)}{(2x+3)^2}$. При $x < -3$ имеем $y' > 0$, т.е. функция возрастает, при $-3 < x < 0$ функция убывает, при $x > 0$ функция возрастает. Поэтому $x = -3$ – точка максимума, $x = 0$ – точка минимума $(y(-3) = -3,\ y(0) = 0)$. Вторую производную вычислять громоздко. Приведем качественный график функции.



§ 3. Приближенные методы вычисления корней

Рассматривая схему качественного исследования графика функции, мы столкнулись с необходимостью вычисления корней различных функций. Получить аналитическое выражение для корней уравнения $f(x) = 0$ возможно лишь в самых простых случаях. Поэтому возникает необходимость приближенного вычисления корней с любой заданной степенью точности. С одним из методов вычисления корней – методом вилки – мы столкнулись при изучении непрерывных функций. Рассмотрим другие приближенные методы вычисления корней.

1. Метод итераций (метод последовательных приближений)

Перепишем уравнение $f(x)=0$ в эквивалентном виде $x=\varphi(x)$. Этого всегда можно добиться, полагая, например, $\varphi(x)=f(x)+x$. Вычисляем последовательность x_n, задавая произвольное значение x_0 из области определения функции $\varphi(x)$ и полагая $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ $(n=0,1,2,\dots)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Если последовательные приближения x_n принадлежат сегменту $[a, b]$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$, то величина α является корнем уравнения $x=\varphi(x)$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$, а множество $[a, b]$ - замкнутое, то $\alpha\in[a, b]$. Перейдем в соотношении $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ к пределу при $n\to\infty$. В силу непрерывности функции $\varphi(x)$, имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_n)=\varphi(\alpha)$, откуда $\alpha=\varphi(\alpha)$,

что и требовалось доказать.

Для того, чтобы применить эту теорему необходимо обеспечить сходимость последовательности $\{x_n\}$. Каждое следующее приближение x_{n+1}, полученное по формуле $x_{n+1}=\varphi(x_n)$, будет ближе предыдущего приближения x_n к корню уравнения $x=\varphi(x)$, если функция $\varphi(x)$ слабо зависит от x (в этом случае $\varphi(x)$ и $\varphi(x_n)$ будут близки). Это будет иметь место, в частности, если производная $\varphi'(x)$ мала. Рассмотрим это соображение более строго.

Теорема. Пусть α - корень уравнения $x=\varphi(x)$ и пусть на некотором сегменте $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$ $(\delta>0)$ производная $\varphi'(x)$ удовлетворяет условию: $|\varphi'(x)|\le q<1$. Если начальное приближение $x_0\in[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$, то последовательные приближения x_n, вычисляемые по формуле $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ $(n=0,1,2,\dots)$, сходятся при $n\to\infty$ к величине α.

Доказательство. Имеем $|x_0-\alpha|\le\delta$. Покажем, что $|x_n-\alpha|\le\delta$, т.е. $x_n\in[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$. Доказательство проведем по индукции. Предположим, что $|x_n-\alpha|\le\delta$ и покажем, что $|x_{n+1}-\alpha|\le\delta$. Действительно, по формуле Лагранжа конечных приращений имеем :

$$|x_{n+1}-\alpha|=|\varphi(x_n)-\varphi(\alpha)|=|\varphi'(c)(x_n-\alpha)|\le q|x_n-\alpha|\le\delta\quad(c\in(\alpha,x_n)).$$

Итак, $|x_n-\alpha|\le\delta$ при любом n. Кроме того, как мы видели, $|x_{n+1}-\alpha|\le q|x_n-\alpha|$, откуда по индукции получаем :

$$|x_1-\alpha|\le q|x_0-\alpha|,\ |x_2-\alpha|\le q|x_1-\alpha|\le q^2|x_0-\alpha|,\ \dots$$

$|x_n-\alpha|\le q^n|x_0-\alpha|$. Так как $q<1$, то

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-\alpha|=0,\qquad\text{т.е. }\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha.$$

Остается воспользоваться предыдущей теоремой. Теорема доказана.

Рассмотрим один из широко применяемых методов итерации - метод касательных, который часто называют методом Ньютона.

2. Метод касательных

Пусть значение $x = x_0$ близко к корню уравнения $f(x)=0$. По формуле Тейлора $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$. Отбрасывая остаточный член, т.е. заменяя график функции $y=f(x)$ на касательную к этому графику в точке x_0, $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, получим следующее приближение для корня $x=x_1$, где

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} .$$

Продолжая этот процесс уточнения корня далее, получим следующий метод последовательных приближений:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} .$$

Он соответствует методу итераций нахождения корня уравнения

$$x = \varphi(x) \qquad \text{при } \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} .$$

Очевидно, что при использовании такого метода итераций нужно потребовать, чтобы $f'(x) \neq 0$ в окрестности корня уравнения $f(x) = 0$.

Теорема. Пусть на сегменте $[a, b]$ уравнение $f(x)=0$ имеет корень $x=\alpha \in (a, b)$, функция $f'(x)$ не равна нулю, а функция $f''(x)$ ограничена. Тогда найдется такое число δ, что последовательность x_n, получаемая по методу Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} ,$$

имеет предел при $n \to \infty$, равный α, если нулевое приближение $x_0 \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta]$.

Доказательство. В нашем случае α является корнем уравнения $x=\varphi(x)$ при $\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. Чтобы воспользоваться теоремой о сходимости метода итераций, оценим производную $\varphi'(x)$. Имеем

$$\varphi'(x)=1-1+\frac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}=\frac{f(x)\cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

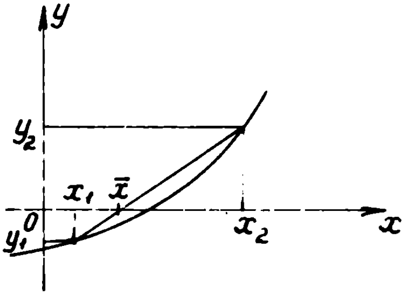
Так как вторая производная $f''(x)$ существует на $[a, b]$, то функция $f'(x)$ непрерывна на этом сегменте и следовательно, функция $[f'(x)]^2$ достигает своего максимального и минимального значения на этом сегменте, т.е. $[f'(x)]^2 \geq m$ (m - некоторая постоянная). Очевидно, что $m > 0$ так как $f'(x) \neq 0$ при $x \in [a, b]$. Кроме того, по условию, $|f''(x)| \leq M$, где M - некоторая постоянная.

Поэтому $|\varphi'(x)| \leq \frac{M}{m}|f(x)|$.

Так как $f(\alpha)=0$ и функция $f(x)$ непрерывна при $x=\alpha$, то $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0$. Поэтому при любом значении $0<q<1$ найдется такое δ, что $\frac{M}{m}|f(x)| \leq q$, если $|x-\alpha|<\delta$. Таким образом, при $|x-\alpha|<\delta$, $x\in[a, b]$ имеем $|\varphi'(x)| \leq q < 1$.

Остается воспользоваться предыдущей теоремой. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi'(x_n)=0$, поэтому сходимость метода итераций в данном случае будет очень быстрой.

Кроме метода касательных при вычислении корней уравнения иногда используют также так называемый метод хорд, заменяя график функции $y=f(x)$ прямой (хордой), проходящей через точки $x_1, y_1=f(x_1)$ и $x_2, y_2=f(x_2)$, для которых функция $f(x)$ имеет разные знаки. Точка пересечения этой прямой с осью x дает приближенное значение корня $\bar{x}$. Затем процесс повторяют, взяв вместо x_1 и x_2 значения x_1 и $\bar{x}$ или x_2 и $\bar{x}$ (при этом необходимо, чтобы на концах сегмента $[x_1, \bar{x}]$ или $[\bar{x}, x_2]$ функция $f(x)$ имела разные знаки).



Часто метод хорд сходится гораздо медленней, чем метод вилки, поэтому вопрос о сходимости этого метода рассматривать не будем.

Мы рассмотрели ряд общих методов вычисления корней уравнения $f(x)=0$. Если функция $f(x)$ является полиномом, то существует также ряд специальных методов вычисления корней, позволяющих вычислять даже комплексные корни.

Пример. Найдем величину $\sqrt{a}$ с помощью метода Ньютона. Полагая $x=\sqrt{a}$, приходим к уравнению $x^2-a=0$, решение которого методом Ньютона приводит к следующей итерационной процедуре:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-a}{2x_n}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right).$$

Чтобы продемонстрировать скорость сходимости метода, положим $a=4$ ($x=2$), $x_0=1$. Тогда получим

$$x_1=2\frac{1}{2},\quad x_2=2\frac{1}{20},\quad x_3=2\frac{1}{1640}.$$

Указанный метод вычисления $\sqrt{a}$ находит широкое применение в практике приближенных вычислений.

1. Интерполирование

Во многих случаях функция $f(x)$ задается таблицей (значения функции $f(x)$ получаются, например, в результате измерений или функция $f(x)$ задана аналитически в очень сложной форме). Встает вопрос о том, чтобы подобрать достаточно простую функцию, совпадающую с функцией $f(x)$ для табличных значений x и совпадающей с этой функцией для промежуточных значений x с достаточной степенью точности. Такая замена исходной функции простыми функциями называется интерполированием. Мы рассмотрим лишь вопрос об интерполировании функций полиномами. Ограничимся рассмотрением функций одной переменной.

Итак, пусть функция $f(x)$ задана в точках x_0, x_1, x_2, . . . , x_n. Подберем полином $L_n(x)$ из условий

$$L_n(x_k) = f(x_k) \qquad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Так как произвольный полином степени n содержит $n+1$ произвольный коэффициент (при степенях x), то удовлетворить $n+1$ условию можно лишь с помощью полинома степени не меньшей, чем n. Покажем, что полином $L_n(x)$ степени n определяется однозначно условиями

$$L_n(x_k) = f(x_k) \qquad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Предположим противное, т.е. предположим существование двух полиномов $L_n(x)$ и $\bar{L}_n(x)$ степени n, удовлетворяющих условиям:

$$L_n(x_k) = \bar{L}_n(x_k) = f(x_k) \qquad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Тогда полином $L_n(x) - \bar{L}_n(x)$ степени n обращается в ноль в $(n+1)$-ой точке $x_0, x_1, \dots, x_n$, что невозможно. Приступим к построению полинома $L_n(x)$. Сначала построим полином $L_{n,j}(x)$ степени n, удовлетворяющий более простым условиям, чем полином $L_n(x)$:

$$L_{n,j}(x_j)=1, \quad L_{n,j}(x_k)=0 \qquad \text{при} \quad k\neq j .$$

Легко проверить, что в таком случае полином

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_j)\,L_{n,j}(x)$$

удовлетворяет нужным условиям, т.е.

$$L_n(x_k)=f(x_k) \qquad (k=0,1,\ldots,n).$$

Полином $L_{n,j}(x)$ равен нулю в n точках $x=x_k$ при $k\neq j$ и имеет степень n. Поэтому по теореме Безу он должен нацело разделиться на полином $\prod\limits_{k\neq j}(x-x_k)$, откуда

$$L_{n,j}(x)=c_j\prod_{k\neq j}(x-x_k),$$

где c_j - некоторая постоянная ($\prod$ - обозначение для произведения). Эту постоянную легко найти с помощью условия $L_{n,j}(x_j)=1$. В результате получаем

$$L_{n,j}(x)=\frac{\prod\limits_{k\neq j}(x-x_k)}{\prod\limits_{k\neq j}(x_j-x_k)},$$

откуда

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} f(x_j)\,\frac{\prod\limits_{k\neq j}(x-x_k)}{\prod\limits_{k\neq j}(x_j-x_k)}.$$

Этот полином совпадает с функцией $f(x)$ в точках $x=x_k$ ($k=0,1,\ldots,n$) и называется интерполяционным полиномом Лагранжа.

Оценим теперь погрешность, допускаемую нами при замене функции $f(x)$ на полином $L_n(x)$. Имеем

$$f(x) = L_n(x) + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ – погрешность.

Для оценки погрешности $R_n(x)$ в фиксированной точке $x = \bar{x}$ предположим, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет на интервале (a, b) производную порядка $n+1$, причем $\bar{x}, x_k \in (a, b)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Зафиксируем значение $x \neq x_k$ и для функции $f(x)$ по точкам x_0, x_1, ... x_n, $\bar{x}$ построим интерполяционный полином Лагранжа $L_{n+1}(x)$, т.е. полином степени $n+1$, удовлетворяющий условиям:

$$L_{n+1}(x_j) = f(x_j) \quad (j = 0, 1, \ldots, n), \quad L_{n+1}(\bar{x}) = f(\bar{x}).$$

Этот полином имеет вид:

$$L_{n+1}(x) = f(\bar{x}) \frac{\prod_{k=0}^{n} (x - x_k)}{\prod_{k=0}^{n} (\bar{x} - x_k)} + \sum_{k=0}^{n} f(x_j) \frac{(x - \bar{x}) \prod_{k \neq j} (x - x_k)}{(x_j - \bar{x}) \prod_{k \neq j} (x_j - x_k)}.$$

Функция $F(x) = f(x) - L_{n+1}(x)$ равна нулю в $n+2$ точках: $x_0, x_1, \ldots, x_n, \bar{x}$. По теореме Ролля в каждом из интервалов, концами которых являются эти точки, найдется такое значение x, для которого производная $F'(x)$ равна нулю:

$$F'(c_k^{(1)}) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

где $c_k^{(1)} \in (a, b)$. Те же рассуждения можно провести, заменяя функцию $F(x)$ на функцию $F'(x)$, т.е. найдутся такие точки $c_k^{(2)} \in (a, b)$ $(k = 0, 1, \dots, n-1)$, в которых $F''(c_k^{(2)}) = 0$. Продолжая эти рассуждения, мы придем к существованию такой точки $c \in (a, b)$, в которой $F^{(n+1)}(c) = 0$. Вычислим производную $[L_{n+1}(x)]^{(n+1)}$.

Так как произведения $\prod\limits_{k=0}^{n}(x - x_k)$, $(x - \bar{x})\prod\limits_{k \neq j}(x - x_k)$ являются полиномами степени $(n+1)$ и коэффициент при старшей степени у этих полиномов равен единице, то производная порядка $(n+1)$ от этих полиномов равна $(n+1)!$.

Поэтому

$$[L_{n+1}(x)]^{(n+1)} = (n+1)!\left[\frac{f(\bar{x})}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\bar{x} - x_k)} + \sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_j)}{(x_j - \bar{x})\prod\limits_{k \neq j}(x_j - x_k)}\right] =$$

$$= \frac{(n+1)!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\bar{x} - x_k)}\left[f(\bar{x}) - \prod_{k=0}^{n} f(x_j)\,\frac{\prod\limits_{k \neq j}(\bar{x} - x_k)}{\prod\limits_{k \neq j}^{n}(x_j - x_k)}\right] =$$

$$= \frac{(n+1)!}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\bar{x} - x_k)}\left[f(\bar{x}) - L_n(\bar{x})\right] = \frac{(n+1)!\; R_n(\bar{x})}{\prod\limits_{k=0}^{n}(\bar{x} - x_k)}.$$

Равенство $F^{(n+1)}(c) = 0$ эквивалентно следующему:

$$R_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \prod_{k} (\bar{x} - x_k) \qquad (c \in (a, b)).$$

Мы получили оценку погрешности, возникающей при замене функции $f(x)$ на интерполяционный полином Лагранжа $L_n(x)$, построенный по точкам x_k $(k=0,1,\dots,n)$. Полином $\prod_{k=0}^{n} (x-x_k)$, входящий в оценку погрешности, быстро растет при удалении x от концов отрезка, на котором расположены точки x_k, поэтому пользоваться интерполяционным полиномом Лагранжа для значений x, лежащих вне этого отрезка, не рекомендуется. Обычно интерполяционный полином Лагранжа используется при небольших значениях n: при $n=1$ (линейная интерполяция) и при $n=2$ (квадратичная интерполяция).

Пример. С помощью полинома Лагранжа для $f(x) = \sin x$, построенного по точкам $x=0$, $x=\pi/6$, $x=\pi/2$ найдем приближенно $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Имеем

$$L_2(x) = f(0)\frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{2})}{(-\frac{\pi}{6})(-\frac{\pi}{2})} + f\left(\frac{\pi}{6}\right)\frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{6}-0)(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2})} + f\left(\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x-0)(x-\frac{\pi}{6})}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(\frac{\pi}{2}-x)x}{\frac{\pi^2}{18}} + 1\cdot\frac{x(x-\frac{\pi}{6})}{\frac{\pi^2}{18}}.$$

Отсюда $L_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{11}{16}$, что близко к $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7$.

§ 5. Неявные функции

Рассмотрим вопрос о существовании функции $y=f(x)$, задаваемой неявно с помощью уравнения $F(x,y)=0$ $(x=(x_1,\dots,x_m)$.

Теорема. Пусть в δ – окрестности точки (x_0, y_0) функция $F(x,y)$ $(x=(x_1,\dots,x_m))$ непрерывна и имеет производную $\frac{\partial F}{\partial y}$, удовлетворяющую условию $\left|\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right| \geq C > 0$ (C – некоторая постоянная), причем $F(x_0,y_0)=0$. Тогда существует такая окрестность точки (x_0,y_0), в которой уравнение $F(x,y)=0$ определяет единственную непрерывную функцию $y=f(x)$, удовлетворяющую условию $y_0=f(x_0)$.

Доказательство. Так как $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$, то функция $F(x_0,y)$ будет монотонной в некоторой окрестности $|y-y_0|\leq\delta_0<\delta$. Поэтому, в силу равенства $F(x_0,y_0)=0$, значения $F(x_0,y_0-\delta_0)$ и $F(x_0,y_0+\delta_0)$ будут противоположными по знаку. Ввиду непрерывности функций $F(x,y_0-\delta_0)$ и $F(x,y_0+\delta_0)$ в окрестности точки x_0 найдется такое число $\delta_1<\delta$ что эти функции будут сохранять знак при $|x-x_0|<\delta_1$, т.е. значения $F(x,y_0-\delta_0)$ и $F(x,y_0+\delta_0)$ будут противоположными по знаку при $|x-x_0|<\delta_1$. Поэтому, в силу непрерывности функции $F(x,y)$ по переменной y, в окрестности $|y-y_0|<\delta_0$ должно существовать такое число $y=f(x)$, что $F(x,y)=0$. Покажем, что не может быть двух решений уравнения $F(x,y)=0$. Пусть $F(x,y_1)=0$ и $F(x,y_2)=0$. Тогда по формуле Лагранжа

$$0=F(x,y_2)-F(x,y_1)=\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}(y_2-y_1) \qquad (y\in(y_1,y_2)),$$

что возможно лишь при $y_2=y$.

Докажем непрерывность функции $y=f(x)$.

Пусть приращению Δx соответствует приращение Δy. Тогда $F(x,y)=0$ и $F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)=0$, откуда

$$0=F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x,y)=\bigl[F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-$$

$$-F(x,\ y+\Delta y)\bigr]+\bigl[F(x,\ y+\Delta y)-F(x,y)\bigr].$$

Но по формуле Лагранжа имеем:

$$F(x,y+\Delta y)-F(x,y)=\frac{\partial F}{\partial y}(x,\tilde{y})\Delta y \qquad (y\in(y,\ y+\Delta y)).$$

Отсюда

$$\Delta y=-\frac{[F(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-F(x,\ y+\Delta y)]}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\tilde{y})}.$$

Из этого равенства,в силу условия $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,\tilde{y})\right|\geq c>0$, видно, что $\Delta y\to 0$, если $\Delta x\to 0$, т.е. функция $y=f(x)$ непрерывна. Выполнение условия $y_0=f(x_0)$ вытекает из равенства $F(x_0,y_0)=0$. Теорема доказана.

Замечание. Условие $\left|\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right|\geq c>0$ можно заменить требованием непрерывности функции $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ в окрестности точки (x_0,y_0) и условием $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Заметим, что в этом случае из существования непрерывной частной производной $\dfrac{\partial F}{\partial x_k}(x,y)$ при некотором значении вытекает существование непрерывной частной производной $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_k}$. Действительно, при доказательстве теоремы мы получили, что приращения $\Delta y=\Delta f(x)$ и Δx связаны соотношением

$$\Delta y = -\frac{[F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x, y+\Delta y)]}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,\tilde{y})} \qquad (\tilde{y} \in (y, y+\Delta y)).$$

Пусть $\Delta x = \Delta_k x$ (изменяется лишь переменная с номером k) и $\Delta x_k \to 0$. Так как при этом и $\Delta y \to 0$, то в силу непрерывности частных производных $\frac{\partial F}{\partial x_k}(x,y)$ и $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ в пределе получаем равенство:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)} .$$

Так как в рассматриваемой окрестности $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$, то функция $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ непрерывна.

Рассмотрим теперь условия существования неявных функций, задаваемых системой уравнений.

Теорема. Пусть функции $F_i(x,y)$ от $m+\ell$ переменных $x=(x_1, \dots, x_m)$, $y=(y_1, \dots, y_\ell)$ $(i=1,2,\dots,\ell)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ в окрестности точки (x_0, y_0) , причем $F_i(x_0, y_0)=0$, а определитель $J = Det \left\| \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right\|$ не равен нулю в точке (x_0, y_0) . Тогда существует такая окрестность точки (x_0, y_0) , в которой система уравнений $F_i(x,y)=0$ определяет единственные непрерывные функции $y_i = f_i(x)$ $(i=1,2,\dots,\ell)$, удовлетворяющие условиям $y_{0i} = f_i(x_0)$ $(y_0 = y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0\ell})$. Если, кроме того, существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial F_i(x,y)}{\partial x_k}$ при некотором значении k , то существуют также непрерывные частные производные $\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_k}$.

Доказательство. При $\ell = 1$, как мы ранее показали, теорема верна. При $\ell > 1$ докажем ее по индукции, предположив, что она верна для $(\ell-1)$ уравнений. Так как определитель $J=Det\left\|\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right\|$ не равен нулю в точке (x_0, y_0), то в этой точке должен быть отличным от нуля хотя бы один из миноров J_i для элементов последнего столбца определителя, так как

$$J=\sum_{i=1}^{\ell} J_i \frac{\partial F_i}{\partial y_\ell} .$$

Пусть для определенности это будет минор $J_\ell=Det\left\|\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right\| \; (i<\ell, j<\ell)$.

В силу непрерывности частных производных $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$ в окрестности точки (x_0, y_0) найдется такая δ - окрестность этой точки, в которой $J\neq 0$, $J_\ell \neq 0$.

Рассмотрим в этой окрестности первые $(\ell-1)$ уравнений $F_i(x,y)=0$. Так как $J_\ell=Det\left\|\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right\|\neq 0 \; (i<\ell, j<\ell)$, то по предположению эти уравнения можно разрешить в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) относительно $(m+1)$ переменных $(x_1,\dots,x_m)=x$ и y_ℓ, т.е. $y_i=\varphi_i(x, y_\ell) \quad (i<\ell)$.

Функции $\varphi_i(x, y_\ell)$ и $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_\ell}(x, y_\ell)$ непрерывны, причем $y_{0i}=\varphi_i(x_0, y_{0\ell}) \; (i<\ell)$. Если функции $F_i(x, y)$ имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x, y)$ при некотором значении k то существуют также непрерывные частные производные $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(x, y_\ell)$ Нам осталось удовлетворить последнему уравнению $F_\ell(x,y)=0$. Подставим в это уравнение найденные выражения для y_i при $i<\ell$: $F_\ell(x,y)=\Phi(x, y_\ell)=0$, где функции $\Phi(x, y_\ell)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y_\ell}(x, y_\ell)$ непрерывны. Кроме того, в случае существования непрерывных частных производных $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x,y)$ при некотором значении k, функция $\Phi(x, y_\ell)$

имеет непрерывную частную производную $\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}$. Покажем, что $\frac{\partial \Phi}{\partial y_\ell} \neq 0$. По правилу дифференцирования сложной функции из равенств $F_\ell(x, y) = \Phi(x, y_\ell)$, $F_i(x, y) = 0$; $y_i = \varphi_i(x, y_\ell)$ при $i < \ell$ имеем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial F_i}{\partial y_\ell} + \sum_{j=1}^{\ell-1} \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_\ell} = 0 \\ &\frac{\partial F_\ell}{\partial y_\ell} + \sum_{j=1}^{\ell-1} \frac{\partial F_\ell}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_\ell} = \frac{\partial \Phi}{\partial y_\ell} \end{aligned}\right\}.$$

Умножим эти равенства, соответственно, на J_i и J_ℓ. В силу известных свойств определителя имеем:

$$\sum_{i=1}^{\ell} J_i \frac{\partial F_i}{\partial y_j} = \begin{cases} 0 & \text{при } j < \ell \\ J & \text{при } j = \ell \end{cases},$$

так как мы имеем сумму произведений элементов столбца с номером j на минор последнего столбца определителя J.

Отсюда $J_\ell \frac{\partial \Phi}{\partial y_\ell} = J$. Но $J_\ell \neq 0$, $J \neq 0$, поэтому $\frac{\partial \Phi}{\partial y_\ell} \neq 0$ и можно разрешить уравнение $\Phi(x, y_\ell) = 0$ относительно y_ℓ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0): $y_\ell = f_\ell(x)$. Функция $f_\ell(x)$ непрерывна. Если кроме того, существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$ при некотором значении k, то существует также непрерывная частная производная $\frac{\partial f_\ell(x)}{\partial x_k}$. Подставляя найденное выражение для y_ℓ в равенства $y_i = \varphi_i(x, y_\ell)$ $(i < \ell)$, мы убеждаемся в существовании единственных непрерывных функций $y_i = f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, \ell)$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Если существуют непрерывные частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial x_k}$ при некотором значении k, то существуют также непрерывные частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)$. Выполнение условия $y_{0i} = f_i(x_0)$ вытекает из равенств $F_i(x_0, y_0) = 0$. Теорема доказана.

§ 6. Зависимые и независимые системы функций

Пусть на некотором открытом множестве A изменения переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_m) = x$ заданы функции $y_i = f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, имеющие непрерывные частные производные первого порядка, т.е. заданы так называемые непрерывно-дифференцируемые функции.

Определение. Будем говорить, что функция $y_k = f_k(x)$ зависит на открытом множестве A от функций $y_i = f_i(x)$ $(i \leq n,\ i \neq k)$, если найдется такая непрерывно-дифференцируемая функция

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n),$$

что для всех точек $x \in A$ имеет место равенство

$$y_k = F(y_1, y_2, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)$$

при $y_i = f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Функции $y_1, \ldots, y_n$ будем называть зависимыми на открытом множестве A, если одна из них зависит от остальных. В противном случае будем называть функции $y_1, \ldots, y_n$ независимыми на множестве A.

Пример: $u = 1$, $v = x + y + z$ система функций зависима, так как $u = F(v)$, где $F(v) = 1$.

Выясним условия, обеспечивающие зависимость или независимость функций. Пусть на открытом множестве A заданы функции $y_i = f_i(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, причем $i = 1, \ldots, n$, $m \geq n$. Рассмотрим прямоугольную матрицу с элементами $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, которую будем называть матрицей Якоби.

Теорема. Если функции $y_i = f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$

зависимы на открытом множестве A, то все миноры порядка n матрицы Якоби равны нулю на этом множестве.

Доказательство. Пусть одна из функций $f_i(x)$ зависит от других. Изменением нумерации функций всегда можно добиться того, чтобы эта функция имела номер n, т.е. $y_n = F(y_1, \ldots, y_{n-1})$ на множестве A. Дифференцируя это равенство, получим:

$$\frac{\partial y_n}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_j} .$$

Это равенство означает, что в матрице Якоби с элементами $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}$ строка с номером n является линейной комбинацией других строк. Поэтому по известному свойству определителей все миноры порядка n матрицы Якоби (они содержат все n строк) равны нулю. Теорема доказана.

Рассмотрим более общую теорему.

Теорема. Пусть n функций $y_i = f_i(x)$ от m переменных $(m \geq n)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка в окрестности точки $x = x_0$. Если все миноры порядка $S+1$ матрицы Якоби $\left\| \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|$, равны нулю в этой окрестности и имеется хотя бы один минор порядка S отличный от нуля в точке x_0, то в некоторой окрестности точки x_0 функции, представленные в указанном миноре порядка S, независимы, а остальные $n-S$ функций зависят от них.

Доказательство. При изменении нумерации функций $f_i(x)$ и переменных $(x_1, \ldots, x_m)$ строки и столбцы матрицы Якоби переставляются. Поэтому можно рассмотреть такую нумерацию функций $f_i(x)$ и переменных $(x_1, \ldots, x_m)$, что отличный от нуля при $x = x_0$ минор Δ_S порядка S матрицы Якоби находится в левом верхнем углу:

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{при } x = x_0 .$$

По предыдущей теореме функции $y_1 = f_1(x), \dots, f_s(x)$ должны быть независимыми в рассматриваемой окрестности. Остается показать, что функции $y_{s+1}(x), \dots, y_n(x)$ могут быть выражены в некоторой окрестности точки x_0 через функции $y_1(x), \dots, y_s(x)$. Рассмотрим равенства

$$f_i(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_m) - y_i = 0 \quad (i \leq s)$$

и постараемся разрешить эти равенства относительно переменных $x_1, \dots, x_s$. Функции $F_i = f_i(x_1, \dots, x_s, x_{s+1}, \dots, x_m) - y_i$ удовлетворяют условиям теоремы о неявных функциях, заданных системой уравнений, так как в окрестности точки

$$(x_{0,1}, \dots, x_{0,m}, y_{0,1}, \dots, y_{0,s}) \quad (y_{0,i} = f_i(x_0))$$

функции F_i имеют непрерывные частные производные первого порядка и определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_s}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_s}{\partial x_s} \end{vmatrix} \equiv \Delta_s$$

не равен нулю при $x_i = x_{0i}$; $y_i = y_{0,i}$.

Разрешая уравнения $F_i(x_1, \dots, x_m, y_i) = 0$ в некоторой окрестности точки $(x_{0,1}, \dots, x_{0,m}, y_{0,1} \cdots y_{0,s})$, в которой $\Delta_s \neq 0$, получим $x_j = \varphi_j(y_1, \dots, y_s, x_{s+1} \dots x_m) (j \leq s)$, где функции φ_j непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Подставляя полученные выражения для $x_1,\dots,x_s$ в равенства $y_\ell = f_\ell(x_1,\dots,x_s,x_{s+1},\dots,x_m)$ при $\ell > s$ получим, что $y_\ell = \Phi_\ell(y_1,y_2,\dots,y_s,x_{s+1},\dots,x_m), (\ell > s)$, причем функции Φ_ℓ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Покажем, что функции Φ, на самом деле, не зависят от переменных $(x_{s+1},\dots,x_m)$. Для этого достаточно показать, что $\frac{\partial \Phi_\ell}{\partial x_k} = 0\ (k > s)$. С помощью правила дифференцирования сложной функции переменных $(y_1,\dots,y_s, x_{s+1},\dots,x_m)$ из соотношений $y_i = f_i(x_1,\dots,x_s,x_{s+1}\dots x_m)$

$(i \le s)$, $\Phi_\ell(y_1,\dots,y_s,x_{s+1},\dots,x_m) = f_\ell(x_1,\dots,x_s,x_{s+1},\dots,x_m)$, $(\ell > s)$,

где $x_j = \varphi_j(y_1,\dots,y_s,x_{s+1},\dots,x_m)$ $(j \le s)$ при $k > s$

находим:

$$\left.\begin{array}{ll} \sum\limits_{j=1}^{s} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} + \frac{\partial f_i}{\partial x_k} = 0 & \text{при } i \le s \\ \sum\limits_{j=1}^{s} \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} + \frac{\partial f_\ell}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial x_k} & \text{при } \ell > s \end{array}\right\}$$

Рассмотрим равный нулю минор матрицы Якоби порядка $s+1$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} & \frac{\partial f_s}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_\ell}{\partial x_s} & \frac{\partial f_\ell}{\partial x_k} \end{vmatrix} .$$

Умножим равенство, содержащее производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ на алгебраическое дополнение D_i элемента $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$ находящегося в последнем столбце минора Δ, а последнее равенство умножим на алгебраическое дополнение элемента $\frac{\partial f_\ell}{\partial x_k}$, т.е. на Δ_s. Сложив полученные равенства и поменяв порядки суммирования по индексам i и j, будем иметь:

$$\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\left[\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}D_i + \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}\Delta_s\right] +$$

$$+\left[\sum_{k=1}^{s}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}D_i + \frac{\partial f_\ell}{\partial x_k}\Delta_s\right] = \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial x_k}\Delta_s .$$

Но сумма $\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}D_i + \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}\Delta_s \quad (j = 1, 2, \ldots, s, k)$,

согласно известному свойству определителей равна определителю, полученному из Δ заменой последнего столбца на столбец с номером j, т.е.

$$\sum_{i=1}^{s}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}D_i + \frac{\partial f_\ell}{\partial x_j}\Delta_s = \begin{cases} 0 & \text{при } j \leq s, \\ \Delta & \text{при } j = k. \end{cases}$$

Поэтому $\frac{\partial \Phi_\ell}{\partial x_k}\Delta_s = \Delta$. Так как в рассматриваемой области изменения переменных $\Delta_s \neq 0$, $\Delta = 0$, то

$\frac{\partial \Phi_\ell}{\partial x_k} = 0 \quad (\ell > s,\ k > s)$. Теорема доказана.

§ 7. Локальный экстремум функции нескольких переменных

Пусть функция $y = f(x)$, $x = (x_1 \ldots x_m)$ определена на множестве A и x_0 - внутренняя точка этого множества.

Определение. Функция $y=f(x)$, $x=(x_1 \dots x_m)$ имеет в точке x_0 локальный максимум (минимум), если найдется такая окрестность точки x_0, в которой выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$.

Локальный максимум и минимум объединяются под общим названием "локальный экстремум". Обозначим $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$, $\Delta x = x - x_0$. Тогда условие локального максимума (минимума) можно записать в виде: при $|\Delta x| < \delta$ имеет место неравенство $\Delta f(x) \le 0$ $(\Delta f(x) \ge 0)$. Необходимое условие локального экстремума для функции, дифференцируемой в точке x_0, легко получить из необходимого условия локального экстремума для функции одной переменной. Для этого достаточно зафиксировать значения всех переменных, кроме одной, т.е. рассмотреть функцию одной переменной x_j, полагая $x_i = x_{0i}$ при $i \ne j$.

Очевидно, эта функция будет иметь локальный экстремум при $x_j = x_{0j}$. В результате мы получаем следующее необходимое условие локального экстремума функции нескольких переменных: $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} = 0$ при $x = x_0$. Эти равенства должны быть выполнены при любых значениях $j = 1, 2, \dots m$. Кратко это условие можно записать в виде $df(x_0) = 0$. Перейдем теперь к рассмотрению достаточных условий локального экстремума. Будем предполагать, что функция $f(x)$ в точке x_0 имеет непрерывные вторые частные производные. Для изучения приращения $\Delta f(x)$ в точке x_0 воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$\Delta f(x) = df(x_0) + \frac{1}{2} d^2 f(x_0) + o(|\Delta x|^2) .$$

Так как $df(x_0) = 0$ в точке экстремума, то

$$\Delta f(x) = \frac{1}{2} d^2 f(x_0) + o(|\Delta x|^2) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \cdot \Delta x_j + o(|\Delta x|^2) .$$

Для удобства исследования перейдем от переменных x_i к переменным $\xi_i = \frac{\Delta x_i}{|\Delta x|}$ и $|\Delta x|$. Обозначим $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij}$.

Тогда

$$a_{ij} = a_{ji} , \quad \Delta f(x) = \frac{|\Delta x|^2}{2} \left[\sum_{ij} a_{ij} \xi_i \xi_j + \alpha \right] ,$$

где $\alpha \to 0$ при $|\Delta x| \to 0$.

Очевидно, имеет место соотношение $|\xi| = 1$,
где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$.

Выражение $\varphi(\xi) = \sum_i \sum_j a_{ij} \xi_i \xi_j$ при $a_{ij} = a_{ji}$

называется в линейной алгебре квадратичной формой переменных ξ_i . Очевидно, что при достаточно малых значениях $|\Delta x|$ знак $\Delta f(x)$ в основном определяется знаком квадратичной формы $\varphi(\xi)$. Введем следующие определения . Квадратичная форма $\varphi(\xi) = \sum_i \sum_j a_{ij} \xi_i \xi_j$ называется:

1) положительно определенной, если $\varphi(\xi) > 0$ при $|\xi| \neq 0$,

2) отрицательно определенной, если $\varphi(\xi) < 0$ при $|\xi| \neq 0$,

3) знакоопределенной, если $\varphi(\xi)$ - положительно определенная или отрицательно определенная квадратичная форма,

4) квазизнакоопределенной, если $\varphi(\xi)$ может принимать либо только неотрицательные значения, либо только неположительные значения,

5) знаконеопределенной, если $\varphi(\xi)$ при $|\xi| \neq 0$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывные частные производные второго порядка в некоторой окрестности точки x_0 , причем $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = 0$. Если квадратичная

$$\varphi(\xi) = \sum_i \sum_j a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j \qquad \text{при} \quad a_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i\, \partial x_j}$$

будет положительно определенной (отрицательно определенной), то x_0 является точкой локального минимума (максимума) функции $f(x)$. Если же квадратичная форма $\varphi(\xi)$ является знаконеопределенной, то функция $f(x)$ не имеет в точке x_0 локального экстремума.

Доказательство. Имеем: $\Delta f(x) = \frac{|\Delta x|^2}{2}\left[\varphi(\xi) + \alpha\right]$,

где $\alpha \to 0$ при $|\Delta x| \to 0$, а $|\xi| = 1$.

Множество точек, удовлетворяющих равенству $|\xi| = 1$, является замкнутым, поэтому непрерывная функция $\varphi(\xi)$ достигает на этом множестве максимального и минимального значения:

$$\varphi(\xi') = \sup_{|\xi|=1} \varphi(\xi), \qquad \varphi(\xi'') = \inf_{|\xi|=1} \varphi(\xi).$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\varphi(\xi)$ является положительно определенной квадратичной формой и поэтому $\varphi(\xi'') > 0$. Выберем $|\Delta x|$ настолько малым, чтобы $|\alpha| < \frac{1}{2}\varphi(\xi'')$ при $|\Delta x| < \delta$.

Тогда

$$\Delta f(x) = \frac{|\Delta x|^2}{2}\left[\varphi(\xi) + \alpha\right] \geq \frac{|\Delta x|^2}{2}\left[\varphi(\xi'') - \frac{1}{2}\varphi(\xi'')\right] = \frac{|\Delta x|^2}{4}\varphi(\xi'') > 0$$

при $0 < |\Delta x| < \delta$, т.е. точка x_0 будет точкой локального минимума. Аналогично рассматривается случай, когда $\varphi(\xi)$ будет отрицательно определенной квадратичной формой. Рассмотрим теперь случай, когда $\varphi(\xi)$ является знаконеопределенной квадратичной формой. В этом случае $\varphi(\xi') > 0$, $\varphi(\xi'') < 0$.

При $\xi = \xi'$ имеем $\Delta f(x) = \frac{|\Delta x|^2}{2} \cdot [\varphi(\xi') + \alpha] > 0$

при достаточно малых $|\Delta x|$, а при $\xi = \xi''$

$$\Delta f(x) = \frac{|\Delta x|^2}{2} [\varphi(\xi'') + \alpha] < 0$$

при достаточно малых $|\Delta x|$, т.е. $\Delta f(x)$ в любой достаточно малой окрестности точки x_0 может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Следовательно, в этом случае x_0 не может быть точкой локального экстремума. Заметим, что случай, когда $\varphi(\xi)$ является квазизнакоопределенной формой нуждается в дополнительном исследовании.

Рассмотрим теперь достаточные условия знакоопределенности и знаконеопределенности квадратичной формы.

Свяжем понятие квадратичной формы

$$\varphi(\xi) = \sum_i \sum_j a_{ij} \xi_i \xi_j \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

с понятием билинейной формы $A(x, y)$ векторов x, y в m - мерном векторном пространстве, т.е. с такой функцией векторов, для которой выполнены условия:

1) $A(\sum_i \alpha_i x_i, y) = \sum_i A(x_i, y)\alpha_i$,

где α_i - числа, x_i - вектора .

2) $A(x, \sum_i \alpha_i y_i) = \sum_i A(x, y_i)\alpha_i$,

3) $A(x, y) = A(y, x)$, т.е. билинейная форма $A(x, y)$ симметрична.

Из этих свойств вытекает, что

$$A(\sum_i \alpha_i x_i, \sum_j \beta_j y_j) = \sum_{ij} A(x_i, y_j)\alpha_i \beta_j \quad .$$

Пусть $(e_1, \dots e_m)$ - базис и разложение вектора x по векторам базиса имеет вид $x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i$.

Тогда $A(x,x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \xi_i \xi_j$,

где $a_{ij} = A(e_i, e_j)$.

Запись квадратичной формы $A(x, x)$ в виде $A(x,x) = \sum a_{ij} \xi_i \xi_j$ зависит от базиса. Выберем новый базис $(f_1, \dots, f_m)$, связанный со старым базисом линейным соотношением. Тогда $x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i = \sum_i \eta_i f_i$

и $A(x,x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \eta_i \eta_j$,

где $b_{ij} = A(f_i, f_j)$. Выберем базис из условия $A(f_i, f_j) = 0$ при $i \neq j$. В результате квадратичная форма запишется в простейшем виде - в виде суммы квадратов:

$$A(x,x) = \sum_i \lambda_i \eta_i^2 , \quad \text{где } \lambda_i = A(f_i, f_j) .$$

Укажем простейший способ выбора такого базиса для случая, когда определители

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} ,$$

не равны нулю.

Будем искать вектора нового базиса f_i в виде $f_i = \sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik} e_k$, где коэффициент α_{ii} выберем из условия $A(f_i, e_i) = 1$, а остальные коэффициенты α_{ik} - из условий $A(f_i, e_j) = 0$ при $j < i$. Эти равенства обеспечивают выполнение условий $A(f_i, f_j) = 0$

при $i \neq j$.

Действительно, при $j < i$ имеем $A(f_i, f_j) =$
$$= \sum_{k=1}^{j} A(f_i, e_k)\alpha_{jk} = 0,$$

если же $j > i$, то доказательство происходит аналогично, если воспользоваться равенством $A(f_i, f_j) = A(f_j, f_i)$:
$$A(f_j, f_i) = \sum_{k=1}^{i} A(f_j, e_k)\alpha_{ik} = 0 \quad \text{при } i < j .$$

Из условий $A(f_i, e_j) = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ $\delta_{ii} = 1$) для α_{ik} получим следующую систему уравнений $\sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik} a_{kj} = \delta_{ij}$.

Определитель этой системы Δ_i отличен от нуля,согласно предположению. Далее,
$$A(f_i, f_i) = \sum_{k=1}^{i} \alpha_{ik} A(f_i, e_k) = \alpha_{ii} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \quad (\Delta_0 = 1)$$

(мы воспользовались решением линейной системы для α_{ik} по правилу Крамера).

Таким образом, в новом базисе квадратичная форма имеет вид: $A(x, x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} \eta_i^2$.

Отсюда получаем следующий критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы:

1) если все определители $\Delta_i > 0$, то форма будет положительно определенной,

2) если $(-1)^i \Delta_i > 0$, то форма будет отрицательно определенной.

Если не выполнено ни одно из этих условий и $\Delta_i \neq 0$, то форма будет знаконеопределенной.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ имеем

$$\varphi(\xi)=a_{11}\xi_1^2+2a_{12}\xi_1\xi_2+a_{22}\xi_2^2 ,$$

где

$$a_{11}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}, \quad a_{22}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}, \quad a_{12}=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\,\partial y} .$$

В данном случае $\Delta_0=1$, $\Delta_1=a_{11}$, $\Delta_2=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$. Точка (x_0,y_0) будет точкой максимума, если $a_{11}<0$, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$. Точка (x_0,y_0) будет точкой минимума, если $a_{11}>0$, $a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$. Если же $a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$, $a_{11}\neq 0$, то функция $f(x,y)$ не имеет в точке (x_0,y_0) экстремума.

§ 8. Условный экстремум функции нескольких переменных.

Рассмотрим вопрос об экстремуме функции $m+n$ переменных $f(x,y)$, $x=(x_1 \ldots x_m)$, $y=(y_1\ldots y_n)$ в предположении, что эти переменные подчинены еще n уравнениям связи:
$F_i(x,y)=0$, $i=1\ldots n$.

Определение. Говорят, что в точке (x_0,y_0) , удовлетворяющей уравнениям связи $F_i(x_0,y_0)=0$ $(i=1\ldots n)$, функция $f(x,y)$ от $n+m$ переменных имеет относительный максимум (минимум), если неравенство $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$, $(f(x,y)\ge f(x_0,y_0))$ имеет место в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) для всех ее точек (x,y) , удовлетворяющих уравнениям связи $F_i(x,y)=0$.

Как практически решить вопрос о том, имеет ли функция $f(x, y)$ относительный экстремум в точке (x_0, y_0) или нет?

Предположим, что в окрестности точки (x_0, y_0) функции $F_i(x, y)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка, причем якобиан $Det \left\| \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right\|$ отличен от нуля в точке (x_0, y_0). Тогда в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) систему уравнений $F_i(x, y) = 0$ можно разрешить относительно y_1, $y_2 \dots y_n$, т.е. найти функцию $y_i = \varphi_i(x)$. Подставляя найденные значения y_i в функцию $f(x, y)$, мы сведем задачу к вопросу о существовании экстремума функции переменных $(x_1, x_2, \dots, x_m)$. При таком способе отыскания точек экстремума имеются некоторые неудобства:

1) решение системы уравнений $F_i(x, y) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$ приводит к большим техническим трудностям,

2) нарушается симметрия задачи относительно переменных x и y.

Можно задачу несколько упростить, рассматривая дифференциалы функций $f(x, y)$ и $F_i(x, y)$. Приравняем дифференциал функции $f(x, y)$ нулю в точке (x_0, y_0), помня что переменные (y_1, y_2, ..., y_n) являются функциями переменных (x_1, x_2, ..., x_m):

$$df = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j} dy_j = 0 .$$

Дифференциалы dy_j являются функциями дифференциалов dx_k. Для нахождения связи между этими дифференциалами, воспользуемся уравнениями связи $F_i(x, y) = 0$:

$$dF_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial y_j} dy_j = 0 \quad \text{при} \quad x = x_0 , \; y = y_0 .$$

Разрешая эти уравнения относительно дифференциалов $dy_1, \dots, dy_n$ (это возможно, так как $Det \left\| \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right\| \neq 0$) и подставляя найден-

ные значения в выражения для дифференциала df , получим равенства вида $\sum\limits_{k=1}^{m} A_k dx_k = 0$ Отсюда, в силу независимости изменения дифференциалов $dx_1, \dots, dx_m$, получим необходимое условие экстремума в виде: $A_k = 0 \ (k = 1, \dots, m)$.
При изложенном способе нахождения необходимого условия относительного экстремума функции $f(x, y)$ все еще отсутствует симметрия относительно переменных x и y . Рассмотрим метод получения необходимых условий относительного экстремума, сохраняющий симметрию задачи относительно переменных x и y . Этот метод называется методом множителей Лагранжа.

Умножим равенства для дифференциалов dF_i на некоторый множитель λ_i и сложим выражения для df и $\lambda_i dF_i$. В результате получим, что в точке (x_0, y_0) локального экстремума имеют место равенства:

$$df + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i dF_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} dx_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_j} dy_j = 0,$$

где

$$\Phi = \Phi(x, y) = f(x, y) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x, y) .$$

Выберем множители $\lambda_1 \dots \lambda_n$ из условий $\frac{\partial \Phi}{\partial y_j} = 0$, т.е. из уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial F_i}{\partial y_j} = 0 .$$

Эти уравнения разрешимы относительно $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$, так $Det \left\| \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right\| \neq 0$ при $x = x_0$, $y = y_0$.
В результате из равенств

$$df + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i dF_i = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} dx_k = 0 ,$$

в силу независимости изменения дифференциалов dx_1, dx_2, ..., dx_m, получим, что $\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0$. Итак, мы получили следующее необходимое условие локального относительного экстремума функции $f(x, y)$ при наличии связей $F_i(x, y) = 0$: составляем функцию Лагранжа $\Phi(x,y) = f(x,y) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x, y)$,

где λ_i – некоторые постоянные; для функции $\Phi(x, y)$ выполняются необходимые условия локального экстремума в обычном виде:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = 0 \ (k = 1, 2, \ldots, m), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_j} = 0 \ (j = 1, \ldots, n).$$

Полученные условия симметричны относительно переменных x и y. В силу такой симметрии в условии $Det \left\| \frac{\partial F_i}{\partial y_j} \right\| \neq 0$ можно заменить переменные y_1 ... y_n любыми n переменными из (x_1, ..., x_m, y_1 ... y_n), т.е. достаточно считать, что функции F_i (x, y) независимы.

Рассмотрим теперь достаточные условия относительного экстремума. Будем считать, что в точке (x_0, y_0) выполнены необходимые условия относительного экстремума. Предположим, что в окрестности точки (x_0, y_0) у функций $f(x, y)$ и $F_i(x, y)$ существуют непрерывные частные производные второго порядка. Используем достаточное условие локального максимума (минимума) функции нескольких переменных $f(x)$ в точке $x = x_0$: дифференциал первого порядка $df(x_0)$ равен нулю, а дифференциал второго порядка $d^2 f(x_0)$ отрицателен (положителен), если хотя бы один из дифференциалов dx_j отличен от нуля. Если мы рассматриваем достаточные условия относительного максимума (минимума) функции $f(x, y)$ при наличии условий связи $F_i(x, y) = 0$, то достаточные условия можно найти следующим образом: разрешаем уравнения $F_i(x, y)$ относительно переменных (y_1 ... y_n); тогда функция

$f(x, y)$ при подстановке найденных значений $(y_1 \dots y_n)$ становится функцией переменных $(x_1 \dots x_m)$; после этого остается применить достаточные условия локального максимума (минимума) для функции m переменных. Так как

$$F_i(x,y) = 0 \quad \text{, то} \quad d^2F_i(x_0, y_0) = 0$$

и, следовательно, $d^2 f(x_0, y_0) = d^2\Phi(x_0, y_0)$, где

$$\Phi(x,y) = f(x,y) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i(x,y) -$$

функция Лагранжа.

Будем считать необходимые условия относительного экстремума выполненными. Тогда

$$d^2\Phi = d[d\Phi] = d\left[\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial\Phi}{\partial x_k} dx_k + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial y_j} dy_j\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_k \cdot \partial x_\ell} dx_k dx_\ell + 2\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_k \cdot \partial y_j} dx_k \cdot dy_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial y_j \cdot \partial y_p} dy_j \cdot dy_p + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\Phi}{\partial y_j} d^2 y_j \quad .$$

В точке (x_0, y_0) последнее слагаемое пропадает, так как $\frac{\partial\Phi}{\partial y_j}(x_0, y_0) = 0$. Мы видим, что в точке экстремума для дифференциала $d^2\Phi(x_0, y_0)$ получается то же выражение, которое получилось бы в предположении, что переменные x и y независимы.

Таким образом ,

$$d^2\Phi(x_0,y_0)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{m}\frac{\partial^2\Phi(x_0,y_0)}{\partial x_k\cdot\partial x_\ell}dx_k\cdot dx_\ell+$$

$$+2\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi(x_0,y_0)}{\partial x_k\cdot\partial y_j}dx_k\cdot dy_j+\sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi(x_0,y_0)}{\partial y_j\cdot\partial y_p}dy_j\cdot dy_p,$$

т.е. выражение $d^2\Phi(x_0,y_0)$ является квадратичной формой относительно дифференциалов $dx_1,\dots,dx_m$; $dy_1,\dots,dy_n$. Если эта квадратичная форма является положительно (отрицательно) определенной, то точка (x_0, y_0) является точкой локального минимума (максимума) функции $f(x,y)$ при дополнительных условиях связи $F_i(x,y)=0$ $(i=1,\dots,n)$.

Если же квадратичная форма для $d^2\Phi(x_0,y_0)$ не является положительно определенной или отрицательно определенной, то требуется дополнительное исследование. Выразим дифференциалы $dy_1,\dots,dy_n$ через дифференциалы $dx_1,\dots,dx_m$ с помощью соотношений $dF_i(x_0,y_0)=0$, т.е. соотношений

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_k}dx_k+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_j}dy_j=0 \quad (i=1,\dots,n).$$

Если подставить найденные значения для дифференциалов $dy_1,\dots,dy_n$ в выражение для $d^2\Phi(x_0,y_0)$, то это выражение становится квадратичной формой относительно дифференциалов $dx_1,\dots,dx_m$. Если эта форма является положительно-определенной (отрицательно-определенной), то точка (x_0, y_0) является точкой относительного минимума (максимума) функции $f(x,y)$ при дополнительных условиях связи F_i (x , y) = 0, если форма будет знаконеопределенной, то точка (x_0 , y_0) не является точкой локального экстремума функции $f(x,y)$.

Пример. Исследовать на условный экстремум функцию $z=x+y$ при условии $x\cdot y-1=0$.

I. Первый способ: $y=\frac{1}{x}$, $z=x+\frac{1}{x}$. Отсюда в точках экстремума $z'=1-\frac{1}{x^2}=0$, т.е. точками экстремума будут $x=1$, $y=1$ и $x=-1$, $y=-1$.

В первой точке $z''=\frac{2}{x^3}>0$ - минимум, во второй точке $z''<0$ - максимум.

2. Второй способ. Составляем функцию Лагранжа

$$\Phi(x,y)=x+y+\lambda(xy-1).$$

Условия для определения точек экстремума: $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{\partial\Phi}{\partial y}=0,\ xy=1,$

$$\left.\begin{aligned}1+\lambda y=0\\1+\lambda x=0\\xy=1\end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $-\lambda=\frac{1}{y}=\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\lambda^2}=1,$

т.е. $\lambda=\pm1$. Точки экстремума $x=1,\ y=1$ и $x=-1,\ y=-1$. Вычислим $d^2\Phi(x,y)$:

$d^2\Phi=+2\lambda\,dx\,dy$. Знакоопределенности квадратичной формы нет. Выразим дифференциал dy через dx :

$$y\,dx+x\,dy=0,\quad dy=-\frac{y}{x}dx=-dx.$$

Отсюда $d^2\Phi=-2\lambda\,dx^2$. При $\lambda=-1$ будет $d^2\Phi>0$; при $\lambda=+1$ будет $d^2\Phi<0$, т.е. точка $(1,1)$ - точка минимума, точка $(-1,-1)$ - точка максимума.

В качестве применения теории условного экстремума рассмотрим вопрос о наибольшем и наименьшем значении функции нескольких переменных на замкнутом ограниченном множестве. Если непрерывная функция $f(x)$ задана на замкнутом ограниченном множестве, то она достигает своего наибольшего и наименьшего значения на этом множестве. Для нахождения их следует найти локальные экстремумы либо во внутренних точках множества, либо в граничных точках и сравнить их по величине (граничные точки - такие точки, в любой окрестности которых имеются как точки, принадлежащие множеству, так и точки, не принадлежащие множеству). Находить локальные экстремумы во внутренних точках множества при наложении определенных требований на функцию $f(x)$ мы умеем. Рассмотрим вопрос о нахождении локальных экстремумов в граничных точках. Для простоты ограничимся случаем трех переменных. Пусть граница области изменения переменных x, y, z, в которой задана функция $u=f(x,y,z)$ будет поверхность, задаваемая уравнением $\varphi(x,y,z)=0$ и пусть функции $f(x,y,z)$, $\varphi(x,y,z)$ имеют непрерывные частные производные второго порядка. В результате мы приходим к следующей задаче: найти точки максимума или минимума функции $u=f(x,y,z)$ при условии $\varphi(x,y,z)=0$. Такая задача является задачей на условный экстремум.

Василий Борисович Уваров
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Зав.редакцией С.И.Зеленский
Редактор И.Ф. Пальчун

Подписано к печати 2.06.1981г.
Формат 60х84/16
Объем 12,0печ.л.
9,15 уч.-изд.л.
Тираж 300 экз.

Заказ №
Цена 30 коп.